A Lógica na Matemática

∅ ∃ U 0 ∨ ⊂ ∩ → 1 ⇒ P F V ~ ∪ ⇔ ∈ ∀ ↔ ∧

Adelmo Ribeiro de Jesus
Eliana Prates Soares
Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Graça Luzia Dominguez Santos



Instituto de Matemática

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

"A solução que estou aconselhando é erradicar a desconexão de assuntos, que destrói a vitalidade do nosso currículo moderno. Há apenas uma matéria para a educação, e esta é a Vida em todas as suas manifestações."

A.Whitehead, "The Aims of Education"

O presente texto, escrito para professores de Matemática, é parte do projeto "A Matemática e Suas Conexões", apoiado pela CAPES, e pelo CADCT, órgão do Estado da Bahia. Nesta sua primeira fase, visa apresentar os tópicos usualmente ensinados no 1º ano do Ensino Médio, acrescidos do estudo da Trigonometria. Os demais conteúdos serão abordados nas duas outras fases.

Procuramos, na medida do possível, fundamentar e justificar todos os conceitos apresentados. Mesmo que o professor não possa (ou não deva), em sala de aula, apresentar um certo tópico mais rigorosamente, precisa conhecer mais sobre este tópico. Com isso poderá ele transmitir suas idéias com mais clareza e facilidade.

A principal característica deste projeto é a busca de ligações, ou conexões, entre a Matemática e as outras Ciências; Isto inclui, em particular, as conexões entre a Matemática e ela própria. É comum ouvir-se dizer: "onde eu vou usar isto?", "para que serve este assunto? " , "por que estudo esta matéria? ". Muitos alunos, e também muitos professores, formulam tais questões. Nosso propósito é dar algumas contribuições para que o professor de Matemática possa responder, satisfatoriamente, essas perguntas. Não se pretende, nem é possível, apresentar toda a rede "interdisciplinar" que existe na Matemática. O professor interessado saberá, a partir dos exemplos citados, encontrar um caminho para motivar mais suas aulas e preparar seus alunos para um futuro melhor.

Adelmo R. de Jesus
Eliana P. Soares
Elinalva V. Vasconcelos
Graça Luzia D. Santos
Ilka Rebouças Freire
Miriam F. Mascarenhas

A LÓGICA NA MATEMÁTICA

1. *BREVE HISTÓRICO*

O pensamento lógico teve forte presença no cerne da Civilização Grega. Aristóteles (384-322 A.C) é tido como o primeiro sistematizador do conhecimento lógico da época. Presume-se que a partir de uma análise das discussões, que eram comuns no seu tempo, o filósofo teria procurado caracterizar um instrumento de que se serviria a razão, na busca da verdade. Aristóteles teve seu trabalho registrado por seus discípulos e a obra de Lógica, intitulada o *Organon,* serviu de fundamentação para a Lógica Simbólica. Aristóteles classificou as proposições em quatro grupos, dois originários de uma consideração qualitativa e dois de considerações quantitativas. Segundo a quantidade, tem-se proposições afirmativas ou negativas e, segundo a qualidade, em universais e particulares. Assim é que na lógica de Aristóteles aparecem expressões como todo, nenhum, algum, etc; e frases tipo "Todo homem é mortal " (universal afirmativa) e "Alguns homens não são sábios" (particular negativa).

Ainda na Grécia Antiga, surgiu a escola estóico-megárica que estudava a lógica das proposições, desenvolvendo aspectos não encontrados na Lógica Aristotélica.

Depois do período dos estóicos-megários, inicia-se um período obscuro, quase virgem de pesquisa. Segundo os elementos históricos existentes, não houve nenhuma contribuição original à Lógica por mais de 1000 anos. Houve apenas o trabalho de transmissão de conhecimentos antigos para a Idade Média. Destaca-se Boécio (470-524) com a tradução latina de parte da obra aristotélica.

Foi um longo período pobre de contribuições para esse ramo do conhecimento científico . Durante os séculos XVII e XVIII e início do século XIX o grande interesse era pela retórica e pelas questões psicológicas. Escapa dessa inflência Leibniz (1646 - 1716), cujas idéias originais e inovadoras ficaram isoladas no século XVII e só viriam a

ser apreciadas e conhecidas no fim do século XIX. Assim é que o uso de diagramas para estudos de lógica, atribuído a Euler, já tinha sido utilizado por Leibniz. No entanto, foi John Venn (1834-1923) quem aperfeiçoou os diagramas no estudo da Lógica.

Leibniz foi o precursor da Lógica Moderna. Ele sugeriu uma espécie de Álgebra Universal, uma linguagem de símbolos que pudesse ser entendida por todos, qualquer que fosse a língua utilizada. Estava assim criado o ambiente adequado para o surgimento da Lógica Simbólica (também chamada de Lógica Matemática ou Lógica Formal) e cujo objetivo era dar um tratamento rigoroso, estrutural, ao conhecimento lógico tradicional.

O período "contemporâneo" da lógica tem suas raízes nos trabalhos de George Boole (1815-1864) que deu novos rumos ao estudo da matéria. A obra fundamental de Boole, *Investigations of the Laws of Thought,* publicada em 1854, compara as leis do pensamento às leis da álgebra. Paralelamente, De Morgan (1806-1871) também contribuiu para o desenvolvimento da álgebra da Lógica. Com os trabalhos de Boole e de Morgan a Lógica clássica torna-se autônoma, separando-se da filosofia para tornar-se a Lógica Matemática.

Os alemães Frege (1848-1925) e Cantor (1845-1918) deram impulsos à Lógica Simbólica. A tentativa de Frege de transformar a Matemática em ramo da Lógica levou a paradoxos depois estudados por Russel e Whithead, autores do "Principia Mathematica", uma das obras fundamentais deste século. Como consequência os lógicos e matemáticos entraram em divergência, a partir da segunda metade do século XIX, dando lugar ao surgimento de pelo menos três correntes de pensamento bem distintas: o logicismo (de Russel), o intuicionismo (de Brouwer) e o formalismo (de Hilbert).

A corrente logicista pretendeu reduzir a Matemática à Lógica, e seu pensamento está bem delineado na obra “Principia Mathematica” e suas origens estão certamente em Leibniz.

A corrente formalista - cujas raízes estão no filósofo alemão Kant, foi liderada por Hilbert. Amplia a atuação da Lógica caracterizando-a como um método de obter inferências legítimas . Uma teoria para ser formalizada deve conter conceitos primitivos, axiomas e teoremas e ser consistente. Ser consistente numa teoria formal significa que se ela contém determinada proposição, não pode conter a sua negação.

A escola intuicionista, cujo maior representante foi o matemático holandês Brouwer, reduz a Lógica a um método que se desenvolve paralelamente a Matemática. Para os seus seguidores, todos os conhecimentos existem por intuição, ou seja, sem auxílio de raciocínio. Rejeitam o príncipio do terceiro excluído, sendo, portanto possível para eles a construção de enunciados que não são verdadeiros ou falsos.

As críticas e divergências em torno dos fundamentos filosóficos do "Principia Matemática" deram lugar ao surgimento de lógicas polivalentes.

Atualmente a Lógica não está, como esteve, até por volta de 1930, dividida nas três correntes acima. Hoje, inúmeras correntes surgem e as três antigas se aproximam. Os estudos ganharam um ritmo acelerado, as especialidades se multiplicam e os problemas se abrem.

2. *PROPOSIÇÕES E CONECTIVOS*

A Lógica Matemática se ocupa da análise de certas sentenças, quase sempre de conteúdo matemático. Também estuda as relações, conexões, entre estas sentenças. Começaremos definindo proposição. Chama-se *proposição* uma sentença (conjunto de palavras e símbolos) declarativa, que exprime um pensamento de sentido completo, e que pode ser classificada como *verdadeira* ou *falsa*.

Os termos *"verdade"* e *"falsidade"* são chamados *valores lógico*s de uma proposição.

Para efeito de classificar as proposições em "verdadeiras" ou "falsas" a Lógica Matemática adota como regras fundamentais os dois seguintes princípios:

I) *Princípio da Não Contradição* - Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

II) *Princípio do Terceiro Excluído* - Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro).

Pelos dois princípios anteriores temos que: *Toda proposição tem um e somente um dos valores lógicos "verdade" ou "falsidade*". Por este motivo, chamamos a Lógica Matemática de *bivalente*.

As proposições serão indicadas por letras p, q, r, s, t, ... e o seu valor lógico por V(p) = V (ou 1) para uma proposição verdadeira e, V(p) = F (ou 0) para uma proposição falsa.

Exemplos e contra-exemplos

1) p: Salvador é a capital da Bahia

2) q: 2 + 3 < 5

3) r: O poeta Castro Alves era baiano.

4) x + 2 = 1

5) Como faz calor!

6) Que dia é hoje?

Como foi convencionado na definição, sentenças exclamativas ou interrogativas (exemplos 5 e 6) não são proposições. O exemplo 4 também não representa uma proposição, uma vez que não podemos atribuir um único valor lógico (depende de x).

As proposições podem ser classificadas em simples e compostas.

Proposições simples - Aquelas que não contêm nenhuma outra como parte integrante de si mesma. São também chamadas de *atômicas* .

Proposições compostas - Aquelas formadas pela combinação de proposições simples. São também chamadas de *moleculares* .

Como foi convencionado anteriormente as proposições simples serão indicadas por letras p, q, r, s, etc.. As proposições compostas serão denotadas por P, Q, R , S, etc..

Exemplos

	Proposição
1) 2 é ímpar	simples
2) 3 é ímpar *e* $\sqrt{2} \in Q$.	composta
3) $2 > 0$ *ou* $3 + 1 = 5$	composta
4) *Se* 4 é par *então* 4 é divisível por 2.	composta
5) 3 é ímpar *se e somente se* 3 é primo	composta

As palavras ou símbolos usados para formar novas proposições a partir de proposições dadas são chamados de *conectivos* .

Os conectivos fundamentais da Lógica Matemática são:

Conectivo	***Símbolo***	
1) não, não é verdade que	$\sim$	negação ou modificador
2) e	$\wedge$	conjunção
3) ou	$\vee$	disjunção
4) se ... então	$\rightarrow$	condicional
5) se e somente se	$\leftrightarrow$	bicondicional

Dadas as proposições simples p e q podemos com o uso dos conectivos formar novas proposições a partir de p e q. Assim, temos:

1) A negação de p	**$\sim p$**	não p
2) A conjunção de p e q	**$p \wedge q$**	p e q
3) A disjunção de p e q	**$p \vee q$**	p ou q
4) A condicional de p e q	**$p \rightarrow q$**	se p então q
5) A bicondicional de p e q	**$p \leftrightarrow q$**	p se e somente se q

Exemplos

1) Dada as proposições:

p: Jorge Amado escreveu o livro "Mar Morto"

q: Rui Barbosa era baiano

temos para as seguintes, as traduções para a linguagem corrente

$\sim p$: Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto".
ou
Não é verdade que Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto".

$p \wedge \sim q$: Jorge Amado escreveu o livro "Mar Morto" **e** Rui Barbosa **não** era baiano
ou
Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **e é falso que** Rui Barbosa era baiano.

$\sim p \vee q$: Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.
ou
Não é verdade que Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.

$\sim(p \vee q)$: **Não é verdade que:** Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.

2) Sendo p: 2 é um número par e q: 6 é múltiplo de 3, para as seguintes proposições temos as traduções para a linguagem simbólica

a)	2 não é par ou 6 é múltiplo de 3	$\sim p \vee q$
b)	Se 6 não é múltiplo de 3 então 2 é par	$\sim q \rightarrow p$
c)	2 não é par, se e somente se, 6 é múltiplo de 3	$\sim p \leftrightarrow q$

3. *OPERAÇÕES LÓGICAS COM PROPOSIÇÕES CÁLCULO PROPOSICIONAL*

Quando trabalhamos com os conjuntos numéricos, definimos operações como a adição, multiplicação, etc. e estudamos as propriedades de tais operações, mostrando que tais conjuntos têm uma estrutura algébrica. No caso da Lógica não trabalhamos com números, mas com proposições. Já vimos que a partir de proposições simples podemos "combiná-las" mediante o uso de conectivos para formar novas proposições. O que queremos saber agora é: conhecidos os valores lógicos das proposições simples, qual o valor lógico da proposição resultante obtida com os conectivos? Na verdade os conectivos funcionam como símbolos operatórios, tais como +, −, ÷, x. Precisamos portanto saber o "resultado" das operações envolvendo conectivos e proposições da Lógica.

Conhecendo-se os valores lógicos de duas proposições p e q, vamos definir os valores lógicos das proposições: $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, que decorrem de situações cotidianas, onde utilizamos o nosso bom senso, a nossa lógica. Nada mais natural que isto.

1) Negação

Dada uma proposição p, a negação de p tem valor lógico verdade quando p é falsa e valor lógico falsidade quando p é verdadeira. Isto pode ser resumido na seguinte tabela, denominada tabela verdade.

p	***~p***
V	F
F	V

Exemplo

p: 2 + 1 = 3 V(p) = V

~p : 2 + 1 ≠ 3 V(~p) = F

2) Conjunção

Dadas as proposições p e q, a proposição $p \wedge q$ é verdadeira quando as duas proposições forem verdadeiras, e é falsa se uma delas for falsa. Pode-se resumir o exposto na tabela a seguir.

p	***q***	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F

F	F	F

Exemplos

1) p: $2 < 5$

   q: $2 + 3 = 5$ $\qquad$ $V(p \wedge q) = V$

2) p: π é um número irracional

   q: 2 é ímpar

   $V(p) = V$ e $V(q) = F$, logo $V(p \wedge q) = F$

3) Disjunção

Dadas as proposições p e q a proposição $p \vee q$ é verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira, e é falsa se as duas forem falsas. Resumindo,

p	***q***	$\boldsymbol{p \vee q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo

p: 2 é ímpar

q: $3 > 0$ $\qquad$ $V(p \vee q) = V$

4) Condicional

Dadas as proposições p e q , a proposição $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa e é verdadeira nos demais casos. Resumindo,

p	*q*	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo

p: 4 é ímpar
q: 3 é par V ($p \to q$) = V

Observações

1) Notemos que, quando o valor lógico da proposição p é falso, temos que a condicional é automaticamente verdadeira (não depende do valor lógico de q). Isto se justifica pelo fato de que se p é falsa , qualquer conclusão pode se tirar daí, verdadeira ou falsa. Por exemplo, se supusermos que $1 = 2$, podemos concluir que $0 = 1$ e também que $3 = 3$. Em outras palavras, se p é falsa, tudo é válido como nos ditados populares: “ Se você é o dono da Coca-Cola então eu sou o rei da Inglaterra”.

Isto dá origem a proposições sem nexo, absurdas, tais como: “Se 2 = 1 então a lua é de queijo”, “Se a Terra é quadrada então 2 + 2 = 4”, que apesar de serem verdadeiras, de acordo com a regra estabelecida, não tem nenhum sentido prático.

2) Na condicional $p \to q$ temos que:

p é chamado de antecedente e q é chamado de consequente.

3) A condicional também pode ser lida como: "p somente se q", "q, se p", "p é condição suficiente para q", "q é condição necessária para p".

4) Uma condicional $p \to q$ não afirma que o consequente se "deduz" do antecedente p, ou seja, pode não haver uma relação intrínseca entre p e q. O que a condicional afirma é unicamente a relação entre os valores lógicos de p e q, de acordo com a definição dada, isto é, a condicional $p \to q$ é uma operação, também chamada de "implicação material". Obviamente, na maioria dos casos, a Matemática vai estar interessada em condicionais verdadeiras, que vão de fato significar que p "implica" q. Veremos melhor isto quando estudarmos "implicação".

4) O exemplo a seguir pode nos ajudar a "justificar" o significado das condições "necessária" e "suficiente".

"Se o pássaro canta então está vivo".

i) O pássaro cantar é condição suficiente para ele estar vivo, ou seja, é suficiente o pássaro cantar para garantirmos que ele está vivo.

ii) O pássaro estar vivo é condição necessária para ele cantar, ou seja, é necessário que o pássaro esteja vivo para que ele possa cantar.

A partir da condicional $p \to q$ podemos obter as seguintes proposições:

i) $q \to p$ é a sua *recíproca*

ii) $\sim q \to \sim p$ é a sua *contrapositiva*

Exemplos

1) Dada a condicional: "Se 4 é par então 4 é divisível por 2", temos

i) a recíproca: "Se 4 é divisível por 2 então 4 é par"

ii) a contrapositiva: "Se 4 não é divisível por 2 então 4 não é par"

2) Dada a condicional: “Se $\sqrt{3}$ é um número irracional então $2\sqrt{3}$ é irracional”, temos

i) a recíproca: "Se $2\sqrt{3}$ é irracional então $\sqrt{3}$ é irracional”

ii) a contrapositiva: "Se $2\sqrt{3}$ não é irracional então $\sqrt{3}$ não é irracional”

5) Bicondicional

Dadas as proposições p e q a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q tiverem os mesmos valores lógicos e é falsa nos demais casos. Resumindo,

p	*q*	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo

p: 3 é ímpar

q: 4 é divisivel por 2 $\qquad V(p \leftrightarrow q) = V$

Observações

1) A bicondicional também pode ser interpretada como a conjunção de duas condicionais: $(p \to q) \wedge (q \to p)$

2) A bicondicional também pode ser lida como

i) p é condição necessária e suficiente para q.

ii) q é condição necessária e suficiente para p.

As definições que não são puramente nominais, são condições necessárias e suficientes. Por exemplo, ABC é um triângulo retângulo se e somente se ABC têm um ângulo reto.

Observação

É muito comum nos livros de Matemática, definições dadas por uma condicional como, por exemplo: um triângulo é retângulo se tem um ângulo reto. Entretanto, deve-se entender que a definição é sempre uma bicondicional.

4. *CONSTRUÇÃO DE TABELAS -VERDADE*

Cada proposição simples p tem dois valores: V ou F, que se excluem. Daí, para n proposições simples $p_1, p_2, \ldots p_n$, há tantas possibilidades quantos são os arranjos n a n, com repetição de 2 elementos (F e V), isto é, $A_{2,n} = 2^n$. Segue-se que o número de linhas da tabela-verdade é 2^n.

Exemplo

Construção da tabela-verdade das seguintes proposições:

1) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2) $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	*q*	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q)) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

3) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$

p	*q*	*r*	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$r \wedge p$	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Uma *tautologia* é uma proposição composta cujo valor lógico é a verdade quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes. Se P é uma tautologia, P também é chamada de proposição tautológica ou logicamente verdadeira. Uma tautologia é em geral indicada por V, T ou 1.

Exemplo

P: $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Uma *contradição* é uma proposição composta cujo valor lógico é a falsidade quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

Se P é uma contradição, P é também chamada de proposição contra-válida ou logicamente falsa. Uma contradição é em geral indicada por F , C ou 0.

Exemplo

Q: $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

Observações sobre o uso de parêntesis

Para evitar ambiguidades, em geral, colocamos parêntesis na simbologia das proposições compostas. Assim, por exemplo, a proposição P: $p \wedge q \vee r$ deve ser lida $(p \wedge q) \vee r$, ou seja na ordem de aparecimento dos conectivos.

Portanto, a supressão de parêntesis deve ocorrer por meio de convenções. Optaremos, pela seguinte ordem de precedência dos conectivos:

1) $\sim$; 2) $\wedge$, $\vee$ (na ordem de aparecimento); 3) $\rightarrow$; 4) $\leftrightarrow$.

Exemplo

A proposição $p \wedge q \vee r \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$, deve ser lida como

$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((\sim r) \rightarrow s)$.

5. ***EQUIVALÊNCIA***

Dizemos que uma proposição P é *logicamente equivalente* ou, simplesmente, *equivalente* a uma proposição composta Q se a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é tautológica.

Usamos a notação $P \Leftrightarrow Q$

Da definição temos que se duas proposições são equivalentes então as suas tabelas-verdade são idênticas.

Observação

Os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos!

$\leftrightarrow$ indica uma operação lógica.

$\Leftrightarrow$ estabelece que $P \leftrightarrow Q$ é tautológica. Não aparecem $V(P) = V$ e $V(Q) = F$ e vice-versa.

Exemplos

1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2) Se P e Q são ambas tautológicas ou ambas contradições então $P \Leftrightarrow Q$.

3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

4) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

5) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

6) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

7) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

8) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

9) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

10) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

11)) $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

Todas as equivalências exemplificadas podem ser demonstradas pela construção das tabelas-verdade, ou utilizando o bom senso, em vários dos casos anteriores.

Por serem muito utilizadas em Matemática, destacamos as seguintes equivalências:

i) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

A condicional e sua contrapositiva são equivalentes; nesta equivalência se baseia o método de demonstração por absurdo.

ii) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

6. *ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES. PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES*

As operações lógicas gozam das seguintes propriedades que podem ser verificadas facilmente.

1. Dupla Negação	$\sim(\sim p)$	$\Leftrightarrow$	p
2. Idempotente	$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p
3. Comutativa	$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$q \wedge p$
	$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$q \vee p$
4. Associativa	$(p \wedge q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
	$(p \vee q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
5. Elemento Neutro	$p \wedge V$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee F$	$\Leftrightarrow$	p
6. Elemento Absorvente	$p \wedge F$	$\Leftrightarrow$	F
	$p \vee V$	$\Leftrightarrow$	V
7. Distributiva	$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. Absorção	$p \vee (p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	p
9. Leis de De Morgan	$\sim(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$
	$\sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \wedge \sim q$
10. Negação da Condicional	$\sim(p \rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge \sim q$
11. Negação da Bicondicional	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Observação

Todas as equivalências continuam sendo válidas quando substituimos as proposições simples por proposições compostas.

Exemplo

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

7. *MÉTODO DEDUTIVO*

A maioria das equivalências foram demonstradas até aqui pelo "método das tabelas-verdade". Veremos agora a demonstração de equivalências por um método mais eficiente, denominado "método dedutivo".

No emprego do "método dedutivo" desempenham papéis importantes as equivalências relativas à álgebra das proposições, que subsistem quando as proposições simples são substituídas por proposições compostas.

Exemplos

1) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow F$ (Redução ao absurdo)

D] $(p \wedge \sim q) \rightarrow F \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee F \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

2) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

D] $p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge V \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$

O exemplo a seguir exemplifica como as equivalências são utilizadas nas demonstrações em Matemática.

Considere o seguinte Teorema: Dadas três retas distintas a, b, c, do plano, se $a \parallel b$ e $b \parallel c$ então $a \parallel c$.

Provaremos usando **redução ao absurdo**, isto é, $a \parallel b$ e $b \parallel c$ e $a \nparallel c \rightarrow F$.

D]

i) $a \not\parallel c \rightarrow a \cap c \neq \emptyset$

ii) $a \cap c \neq \emptyset$ e a // b e b // c $\rightarrow$ a = c (axioma das paralelas)

iii) a = c , é uma contradição, pois por hipótese as retas são distintas.

Exercícios

1) Dê a negação das seguintes proposições:

A) Irei à praia e não irei ao cinema

B) É suficiente cantar para estar vivo.

C) É suficiente ser divisível por 2 para ser um número par.

D) É necessário ser um número ímpar para ser primo ou ser divisível por 3

E) Se um triângulo ABC é retângulo e $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são ângulos agudos então $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$.

2) Utilizando as propriedades operatórias, simplifique as seguintes proposições:

A) $(p \vee (p \wedge q)) \wedge \sim(p \wedge q)$

B) $(p \wedge \sim(q \vee r)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim r))$

C) $\sim p \rightarrow \sim(p \wedge q)$

3) Mostre, sem utilizar tabela-verdade (método dedutivo) as seguintes equivalências:

A) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

B) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

C) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

D) $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow r$

8. *CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO*

Os últimos dez anos vêm presenciando um aumento acelerado da aplicação da Matemática, principalmente da Álgebra, no entendimento e solução dos problemas das Ciências da Computação. As estruturas algébricas estão sendo, cada vez mais, empregadas na modelagem e controle de circuitos eletrônicos e d sistemas de informações. É importante, portanto, que a álgebra aplicada à computação, em especial a Lógica venha sendo introduzida nas escolas de 2º e 3º graus .

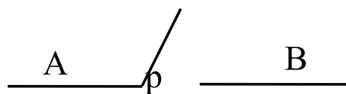
Vamos exemplificar, através dos circuitos, como a estrutura algébrica da Lógica pode ser útil no desenvolvimento da eletrônica. O modelo da aplicação que mostraremos pode ser desenvolvido e estendido para outras áreas. Ele é usado nos estudo de automação e leva a simplificações que permitem redução de custos e economia de tempo em projetos com os quais possa relacionar-se.

Circuito com um interruptor

Chamamos interruptor ao dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico que pode assumir um dos dois estados: aberto ou fechado

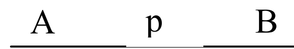
Designamos o interruptor pela letra p. Quando o interruptor está aberto a corrente não atravessa o circuito, atribuímos o valor 0 para p e indicamos

V(p) = 0



Quando o interruptor está fechado a corrente atravessa o circuito, atribuímos o valor 1 para p e indicamos

V(p) = 1



Circuito com dois interruptores

1. Circuito em série

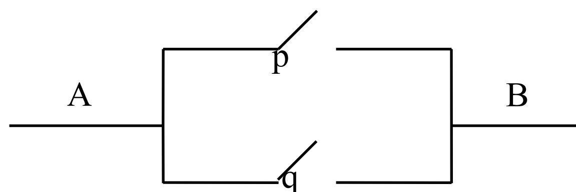


A corrente só atravessa este circuito quando os dois interruptores estão fechados. Portanto este circuito pode ser representado por F = F (p,q) que satisfaz a tabela a seguir:

p	***q***	***F***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Observe que **F (p,q) = p $\wedge$ q**

2. Circuito em paralelo



A corrente atravessa este circuito quando pelo menos um dos interruptores está fechado. Este circuito pode ser representado pela função F= F(p,q) que satisfaz a tabela a seguir:

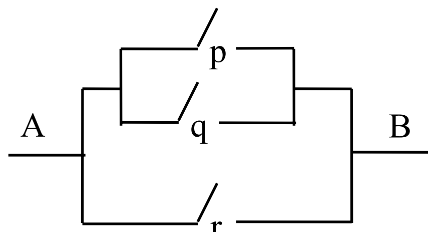
p	*q*	*F*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

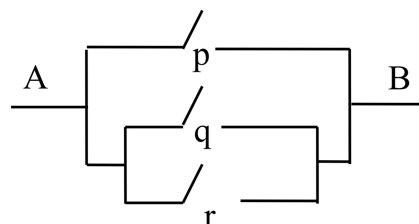
Observe que **F (p,q) = p ∨ q**.

São válidas as propriedades:

1.Comutativa

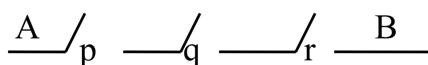
2. Associativa : Nos dois esquemas, a corrente passa pelo circuito, quando pelos menos um dos interruptores está fechado.

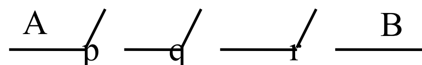




$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

Nos dois esquemas a seguir, a corrente só atravessa o circuito quando p, q e r estão fechados.

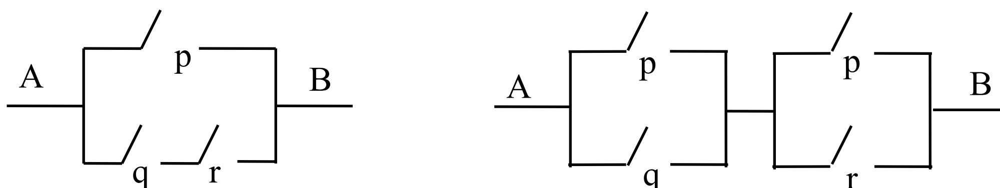




$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

3. Distributiva

Nas duas situações, a corrente passa quando p estiver fechado ou q e r estiverem fechados. Nos outros casos, a corrente não atravessa os circuitos.



$$p\vee(q\wedge r) = (p\vee q) \wedge (p\vee r)$$

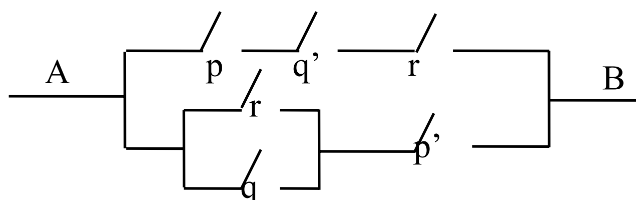
Até agora trabalhamos com circuitos em que os interruptores eram independentes; porém dois ou mais interruptores podem estar conectados da seguinte forma

a) quando um liga, o outro desliga e reciprocamente

b) quando um liga, o outro liga. Quando um desliga, o outro também faz o mesmo.

No caso a) denotaremos um interruptor por p e outro por p’, no caso b) denotaremos os dois interruptores pela mesma letra. O caso a) comporta-se como a operação complementar.

Usando mais interruptores, podemos obter vários circuitos mais complicados, como por exemplo:



O circuito acima pode ser representado pela função F(p,q,r) = (p∧q'∧r)∨[(r∨q) ∧p']

p	*q*	*r*	*p∧q'∧r*	*(r∨q) ∧p'*	*F*
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Logo, a corrente passa através do circuito nos seguintes casos:

a) p e r estão fechados e q está aberto (p ∧ q' ∧ r)

b) q e r estão fechados e p está aberto (p' ∧ q ∧ r)

c) q fechado , p e r estão abertos (p' ∧ q ∧ r')

d) r está fechado, p e q estão abertos (p' ∧ q' ∧ r)

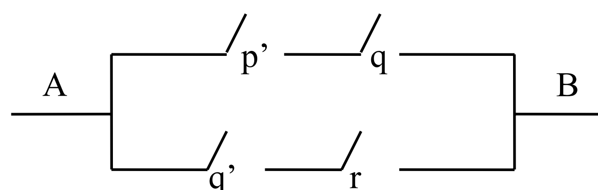
Como estamos interessados em circuitos que passem corrente, podemos simplificar o circuito acima considerando apenas as linhas da tabela anterior nas quais F = 1

Assim, obtemos:

F = (p∧q'∧r) ∨(p'∧q∧r) ∨((p'∧q∧r') ∨((p'∧q'∧r) =

[(p'∧q) ∧(r∨(r')] ∨([(q'∧r)) ∧((p∨(p')]= (p'∧q) ∨((q'∧r)

Que pode ser representado pelo esquema.



Observação

Podemos também simplificar circuitos, usando equivalências conhecidas.

9. *IMPLICAÇÃO LÓGICA*

Diz-se que uma proposição P *implica logicamente* ou, simplesmente, *implica* uma proposição Q, se Q é verdadeira sempre que P for verdadeira. Indicamos P $\Rightarrow$ Q.

Como consequência imediata da definição temos que P $\Rightarrow$ Q significa que a condicional P $\rightarrow$ Q é tautológica, isto é, P $\rightarrow$ Q $\Leftrightarrow$ V

De fato. Pela definição, se temos que P $\Rightarrow$ Q , então não ocorre a situação V(P) = V e V(Q) = F que é o único caso em que a condicional é falsa. Logo, P $\rightarrow$ Q é uma tautologia.

Observação

Os símbolos $\Rightarrow$ e $\rightarrow$ são distintos!

$\rightarrow$ indica uma operação lógica

$\Rightarrow$ estabelece que a condicional P $\rightarrow$ Q é tautológica. Não ocorre portanto V(P) = V e V(Q) = F.

Para demonstrar uma implicação, P $\Rightarrow$ Q, podemos também utilizar o método dedutivo, que neste caso consiste em mostrar que P $\rightarrow$ Q $\Leftrightarrow$ V.

Exemplos

1) O pássaro canta $\Rightarrow$ o pássaro está vivo.

2) x é par $\Rightarrow$ x é divisível por 2

3) x é um número primo $\Rightarrow$ x = 2 *ou* x é ímpar.

4) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

5) $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge (x \neq y) \Rightarrow x = 0$

6) $(x = y \vee x < 4) \wedge (x \geq 4) \Rightarrow x = y$

Algumas implicações lógicas se destacam por terem papel importante nas demonstrações matemáticas. Tais implicações são chamadas de *Regras de Inferência.* Vejamos alguns exemplos.

1. Regra da Adição (A.D.)

$p \Rightarrow p \vee q$

$q \Rightarrow p \vee q$

2. Regra da Simplificação (SIMP)

$p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \Rightarrow q$

3. Regra do Modus Ponens (M.P)

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

4. Regra do Modus Tollens (M.T)

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

5. Regra do Silogismo Hipotético (S.H)

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Há teoremas em Matemática que são da forma $P \Rightarrow Q$, isto é, uma condicional $P \rightarrow Q$ tautológica, onde P é chamada de “hipótese” e Q é a “tese”. Então, tudo que foi dito anteriomente vale para teoremas desse tipo. Assim se $P \rightarrow Q$ é um teorema, então,

se $Q \rightarrow P$ é verdade, temos que a recíproca do teorema é verdadeira; se $P \rightarrow Q$ é um teorema, $\sim Q \rightarrow \sim P$ é um teorema (contrapositiva).

Exercício

Escreva a recíproca e a contrapositiva das proposições, e verifique se a recíproca é verdadeira.

a) Se o triângulo ABC é retângulo em A então o triângulo tem dois ângulos agudos, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

b) Se dois ângulos A e B tem lados paralelos então A e B são congruentes.

10. *A LÓGICA NA TEORIA DOS CONJUNTOS*

Vejamos a utilização da Lógica na Matemática dando exemplos na Teoria dos Conjuntos. Vamos supor conhecidos os conceitos primitivos de conjunto, elemento, a relação de pertinência entre elemento e conjunto, o conjunto-universo, conjunto vazio etc.. Usamos o símbolo $a \in A$ para indicar que o elemento a pertence ao conjunto A. Usamos o símbolo $a \notin A$ para indicar que o elemento a não pertence ao conjunto A.

Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B ou que é *subconjunto* de B e indicamos $A \subset B$ se e somente se todo elemento que pertencer a A pertencer também a B. Em linguagem simbólica temos:

$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Assim, se queremos mostrar que um conjunto A está contido em um conjunto B, devemos mostrar a implicação $x \in A \Rightarrow x \in B$, isto é, assumindo que $x \in A$ é verdade, mostrar que $x \in B$ é verdade.

Dados os conjuntos A e B temos que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$.

A conjunção e a disjunção são operações lógicas usadas nas definições de união e interseção entre dois conjuntos A e B.

Sejam A e B dois conjuntos dados, subconjuntos de um determinado universo U. Definimos:

1) A *união* de A e B como sendo o conjunto $A \cup B = \{ x \in U; x \in A \vee x \in B \}$

2) A *intersecção* de A e B como sendo o conjunto $A \cap B = \{ x \in U; x \in A \wedge x \in B \}$

Dados os conjuntos A e B chama-se *diferença* entre os conjuntos A e B e indica-se $A - B$ o conjunto de todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$A - B = \{ x \in U; x \in A \wedge x \notin B \}$.

Quando $A \subset B$, a diferença $B - A$ é chamada de complementar de A em relação a B e indica-se $C_B A = B - A$. No caso de B ser o conjunto universo indicamos simplesmente C_A , $\overline{A}$ ou ainda A'.

Pelas definições vistas vemos que as operações lógicas estão intimamente relacionadas com as operações entre conjuntos. Podemos estabelecer as relações:

Conjunção	x	interseção	$\wedge$, $\cap$
Disjunção	x	união	$\vee$, $\cup$
Condicional	x	relação de inclusão	$\rightarrow$, $\subset$
Bicondicional	x	igualdade	$\leftrightarrow$, =
Negação	x	complementar	~ , **C**
Contradição	x	conjunto vazio	**F**, $\varnothing$
Tautologia	x	conjunto universo	**V**, **U**

Consideremos as seguintes propriedades relativas a conjuntos

Propriedades: Dados A, B e C subconjuntos quaisquer de U temos,

1. $\varnothing \subset A$

2. a) $A \subset A \cup B$ b) $A \cap B \subset A$

3. a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

4. a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

5. a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. a) $A \cup U = U$ b) $A \cap U = A$

7.a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8. a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

9). $\overline{\overline{A}} = A$

10. a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

11. a) $A \cup \overline{A} = U$ b) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

12. a) $\overline{\varnothing} = U$ b) $\overline{U} = \varnothing$

Todas essas propriedades são demonstradas facilmente, utilizando a lógica e as relações que já estabelecemos. Demonstraremos algumas e deixaremos o restante como tarefa para o leitor.

D] 1. Devemos mostrar que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Temos:

Para todo $x \in U$ a proposição "$x \in \varnothing$" é falsa e portanto a proposição "$x \in \varnothing \to x \in A$" é verdadeira.

2. a) Devemos mostrar que "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$".

Segue da implicação $p \Rightarrow p \vee q$ (adição) que "$x \in A \Rightarrow$ $x \in A$ ou $x \in B$".

Portanto "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$"

8. a) Devemos mostrar que "$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$" ou seja, que .

"$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. Esta equivalência segue da propriedade $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

11. *ARGUMENTOS*

Um dos problemas centrais da Lógica é a investigação do processo de raciocínio. Em toda ciência dedutiva um certo conjunto de proposições é aceito sem demonstração (axiomas) e, deste conjunto outras proposições são derivadas por raciocínio lógico.

Nosso objetivo agora é investigar os processos que serão aceitos como válidos na derivação de uma proposição chamada de *conclusão*, a partir de proposições dadas chamadas *premissas*.

Exemplos

1) P_1 : Se chove então fica nublado.
   P_2 : Choveu.
   Conclusão - Q: Está nublado.

2) P_1: Se fizer sol então irei à praia.
   P_2: Não fui à praia.
   Conclusão - Q: Não fez sol.

3) P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.
   P2: Não sou cantora.
   Conclusão - Q: Não sou artista.

4) P_1: Todo professor de Matemática é licenciado em Matemática..
   P2: Todos os cursistas do Pró-Ciências são professores de Matemática.
   Conclusão - Q: Todos os cursistas são licenciados em Matemática.

Analisando os exemplos 1), 2) e 4) acima, podemos observar que as conclusões são deduzidas a partir das premissas assumindo a veracidade das mesmas, o mesmo não acontecendo com o exemplo 3).

Cabe observar que uma conclusão pode ser deduzida a partir de sentenças falsas. Isto pode conduzir a conclusões não necessariamente verdadeiras, como no Exemplo 4 acima. Como veremos a seguir, **a lógica está interessada em verificar se a conclusão decorre das premissas, assumindo que as mesmas são verdadeiras.**

A verdade ou falsidade das asserções isoladas é da competência dos especialistas. Daremos a seguir o conceito de "argumento".

Definição: Sejam $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ e Q proposições quaisquer. Chama-se *argumento* toda afirmação de que as proposições $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ têm como consequência ou acarretam uma proposição final Q.

$P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ são chamadas de *premissas* e Q de *conclusão*.
Usamos a notação $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \vdash Q$, que podem ser lidas das seguintes maneiras:
i) $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ acarretam Q
ii) Q decorre de $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$
iii) Q se deduz de $P_1, P_2, \dots, P_n$.
Observação:
Um argumento que contém duas premissas é chamado de *silogismo*.

Definição: Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \vdash Q$ diz-se *válido* se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira sempre que as premissas $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ forem todas *consideradas verdadeiras*. Um argumento que não é válido diz-se um *sofisma*.

Teorema (Critério de Validade de um Argumento)

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \vdash Q$ é válido $\Leftrightarrow$ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia $\Leftrightarrow$ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$.
D] As premissas $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n$ é verdadeira. Logo, o argumento $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira sempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, se e somente se a proposição

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ implica logicamente a conclusão Q, o que é equivalente a afirmar que a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.

Exemplo

P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.

P_2: Não sou cantora.

Conclusão - Q: Não sou artista.

$P_1, P_2 \vdash Q$

O argumento não é válido, pois podemos ter a situação V(Q) = F e $V(P_1 \wedge P_2) = V$. De fato, Fernanda Montenegro é artista mas não é cantora.

12. *MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DA VALIDADE DE UM ARGUMENTO*

Tabela-Verdade

Dado o argumento $P_1, P_2, P_3, ... P_n \vdash Q$ a este argumento corresponde a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ chamada de condicional associada ao argumento dado, cujo antecedente é a conjunção das premissas e o consequente é a conclusão. Para testarmos a validade do argumento temos, pelo critério de validade, que verificar se a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica. A tabela-verdade é portanto o método mais geral para se testar a validade de um argumento.

Exemplos

1) $P_1, P_2, P_3 \models Q$

P_1: João vai ao cinema ou vai ao clube.

P_2: Se vai ao clube, então telefona.

P_3: João não telefonou.

Q: João foi ao cinema.

Consideremos: p: João vai ao cinema, q: João vai ao clube, r: João telefona.

O argumento reescrito em linguagem simbólica fica: $p \vee q, q \rightarrow r, \sim r \models p$

Usando o critério de validade verificamos, pela tabela-verdade, que a condicional

$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\sim r) \rightarrow p$ é tautológica. Logo, o argumento é válido

			(1)	(2)	(3)	(4)	
p	q	r	$p \vee q$	$q \rightarrow r$	$\sim r$	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$	$(4) \rightarrow p$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V

2) $P_1, P_2 \vdash Q$

P_1: Se eu fosse cantora então seria artista.

P_2: Não sou cantora

Q: Não sou artista

Consideremos: p: Sou cantora, q: Sou artista.

O argumento em linguagem simbólica fica: $p \to q,\ \sim p \vdash \sim q$

Construindo a tabela-verdade da condicional $(p \to q) \wedge (\sim p) \to \sim q$ obtemos:

		(1)	*(2)*	*(3)*		
p	q	$p \to q$	~p	$(1) \wedge (2)$	~q	$(3) \to \sim q$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Vemos pela tabela que a condicional não é tautológica, logo, a condicional é um sofisma!

Analisando a quarta linha da tabela verdade observamos que os valores lógicos V(p) = F, V(q) = V(r) = V nos mostram a situação em que temos $V(P_1 \wedge P_2) = V$ e V(Q) = F. Isto mostra a não-validade do argumento.

De uma maneira geral mostrar a *não-validade* de um argumento consiste em encontrar uma atribuição de valores lógicos às proposições simples, componentes do argumento, que torne todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

O método da tabela-verdade permite demonstrar ou testar a validade de qualquer argumento, mas o seu emprego torna-se cada vez mais trabalhoso a medida que

aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Assim, vamos buscar outros métodos mais eficientes para a análise da validade de um argumento.

Demonstração Indireta

Um outro método utilizado para se mostrar a validade, ou não, de um argumento $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ é o chamado *método da demonstração indireta,* ou demonstração por absurdo, que consiste em negar a conclusão, isto é, supor V(~Q) =V e deduzir logicamente uma contradição qualquer, ou seja a negação de alguma premissa.

Este método está baseado na equivalência entre a condicional e a sua contrapositiva, isto é, $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$. Assim,

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P_1 \vee \sim P_2 \vee \sim P_3 \vee \ldots \vee \sim P_n$$

Uma vez que as premissas são admitidas como verdadeiras, chegar à negação de uma delas é uma contradição.

Exemplo

Use o método da demonstração indireta para analisar a validade dos seguintes argumentos.

1) $P_1, P_2, P_3 \vdash Q$

P_1: João vai ao cinema ou vai ao clube.

P_2: Se vai ao clube, então telefona.

P_3: João não telefonou.

Q: João foi ao cinema.

Supondo que João não foi ao cinema, então por P_1 ele vai ao clube. Segue de P_2 que João telefonou, o que contradiz P_3. Logo o argumento é válido.

Esquematizando temos: p: João vai ao cinema, q: João vai ao clube, r: João telefona

O argumento reescrito em linguagem simbólica fica: $p \vee q,\ q \rightarrow r,\ \sim r \ \vdash p$

P_1: $p \vee q$

P_2: $q \rightarrow r$

P_3: $\sim r$

Q: p

Vamos assumir que V(Q) = V(p) = F. De P_1 temos que V(q) = V. Com este valor para q segue de P_2 que V(r) = V, o que contradiz P_3 . Logo, o argumento é válido.

2)

P_1: $p \rightarrow q \vee r$

P_2: $p \wedge q$

P_3: $q \vee r \rightarrow p$

Q: $p \wedge r$

Suponhamos V(Q) =V($p \wedge r$) = F. Temos duas alternativas:

a) V(p) = F; b)V(r) =F

Analisando separadamente temos:

a) V(p) = F

Neste caso temos uma contradição em P_2.

b) V(r) = F

Temos por P_2 que V(p) = V(q) = V. Com estes valores temos V(P_1) = V(P_2) = V(P_3) = V e V(Q)= F. De b) podemos concluir que o argumento é um sofisma.

3) P_1: $\sim p \vee \sim q$

P_2: $r \vee s \rightarrow p$

P_3: ~s ∨ q

P_4: ~ r

Q: ~(r ∨ s)

Suponhamos V(Q) = V(~(r ∨ s)) = F ⇔ V(~r ∧ ~s) = F. Temos duas alternativas:

a) V(r) = V

Este caso contradiz P_4.

b) V(s) = V

Se V(s) = V temos por P_3 que V(q) = V. Então V(p) = F em P_1, o que contradiz P_2. De a) e b) podemos concluir que o argumento é válido.

4) P_1: p → q ∨ r

P_2:r ↔ s

P_3: q ∨ ~p

Q: ~p ∧ q

Suponhamos V(Q) = V(~p ∧ q) = F. Temos duas alternativas: a) V(p) = V ou b) V(q) = F.

a) V(p) = V:

Se V(p) = V temos que V(q) = V, por P_3. Isto acarreta V(P_1) = V, independentemente do valor de r. Basta portanto atribuirmos os mesmos valores a r e s para obtermos V(P_2) = V . Temos assim, valores lógicos para p, q, r e s tais que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Podemos portanto concluir que o argumento não é válido sem precisar analisar a outra alternativa.

Dos exemplos analisados podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Para analisarmos a validade de um argumento pelo método da demonstração indireta , negamos a conclusão. Se chegarmos à negação de uma das premissas então o argumento é *válido*. Se conseguirmos valores lógicos paras proposições componentes que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa então o argumento é um *sofisma*.

2. Quando a negação de Q nos leva a mais de uma alternativa para ser analisada, temos que analisar todas para concluir que o argumento é válido. Se ao analisarmos uma das alternativas encontramos valores que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa já podemos garantir que o argumento é um sofisma e não precisamos analisar as outras situações.

3. A prova da não validade de um argumento consiste em apresentar valores para as proposições que tornem as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. É óbvio que toda vez que for possível encontrar essa atribuição de valores sem utilizar tabela-verdade evita-se um bom trabalho. O método da demonstração indireta nos permite chegar a esses valores.

Vejamos alguns exemplos de como o método da demonstração indireta está presente nas demonstrações matemáticas. Vamos mais uma vez utilizar a Teoria dos Conjuntos para a nossa ilustração.

1) Mostre que $(A - B) \cap B = \varnothing$

D] Suponhamos, por absurdo, que $(A - B) \cap B \neq \varnothing$. Então existe um elemento x tal que $x \in A - B$ e $x \in B$ o que é equivalente a afirmar que $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in B$, o que é uma contradição!

2) Mostre que: Se $A \subset B$, $C \subset D$ e $B \cap D = \varnothing$ então $A \cap C = \varnothing$.

Nossas premissas neste caso são:

$P_1 : A \subset B$

$P_2 : C \subset D$

$P_3 : B \cap D = \varnothing$

e a conclusão é:

$Q : A \cap C = \varnothing$

D] Vamos negar a conclusão, isto é, supor $A \cap C \neq \varnothing$. Assumindo as premissas verdadeiras vamos usar "argumentos" que nos levem a uma contradição. Se $A \cap C \neq \varnothing$, temos que existe um elemento x tal que $x \in A$ e $x \in C$. De P_1 e P_2 concluímos que $x \in B$ e $x \in D$. Mas, isto contradiz a premissa P_3.

14. *SENTENÇAS ABERTAS*

O cálculo proposicional é insuficiente para a Matemática. Considere os seguintes exemplos:

a) Existe triângulo retângulo.

b) Quaisquer que sejam os pontos A e B, existe uma reta *a* tal que $A, B \in a$.

O teorema a) trata-se de teorema existência, que tem um quantificador existencial e o teorema b) apresenta um quantificador universal. Por este motivo faz-se necessário o estudo do cálculo de predicados (proposições quantificadas).

Há expressões às quais não podemos atribuir os valores lógicos "falso" ou "verdadeiro", como, por exemplo:

1. $x + 1 = 0$
2. $x + y = 1$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

A depender do valor atribuído a x em 1), a x e y em 2) e a x, y e z em 3), as expressões acima passam a ter um valor lógico V ou F, passando a ser proposições.

Chama-se *sentença aberta* com *uma variável* em um conjunto A, uma expressão que indicaremos por p(x), tal que p(a) é verdadeira ou falsa para todo elemento a

pertencente a A. A sentença aberta também é chamada de *função proposicional*, o conjunto A de *conjunto-universo* e o conjunto dos elementos de A tais que p(a) é verdade é chamado de *conjunto-verdade* que indicaremos por V_p

$V_p = \{ a \in A; V(p(a)) = \mathbf{V} \}$

Exemplos

1. Determinemos o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas nos conjuntos indicados.

a) p(x): $2x - 1 = 3$, em N $\qquad V_p = \{2\}$

b) p(x): $x^2 - 1 = 0$, em Z $\qquad V_p = \{-1, 1\}$

c) p(x): $x > 3$, em $A = \{-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\qquad V_p = \{4, 5, 6, 7\}$

Operações Lógicas com Sentenças Abertas

As operações lógicas sobre proposições se estendem naturalmente as sentenças abertas. Assim, dadas as sentenças p(x) e q(x) podemos obter novas sentenças como:

1) $\sim p(x)$

2) $p(x) \wedge q(x)$

3) $p(x) \vee q(x)$

4) $p(x) \rightarrow q(x)$

5) $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Admite-se todas as regras e propriedades dos conectivos para estes casos.

Exemplos

Determinemos o conjunto verdade em $A = \{ -1, 0, 1 \}$ para cada uma das seguintes sentenças abertas.

1) $p(x)$: $x + 1 = 1$, logo $V_p = \{0\}$

$\sim p(x) : x + 1 \neq 1$, $V_{\sim p} = \{-1, 1\}$. Observe que $V_{\sim p} = A - V_p$.

Generalizando, se $p(x)$ é uma sentença aberta em A então $V_{\sim p} = A - V_p$.

2) $p(x) \wedge q(x)$: $x + 1 = 1 \wedge x \geq -1$

$V_{p \wedge q} = \{0\}$

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q$

3) $p(x) \vee q(x) : x^2 = 1 \vee x + 1 = 1$

$V_{p \vee q} = \{-1, 0, 1\}$

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \vee q} = V_p \cup V_q$.

4) $p(x) \rightarrow q(x)$: $x + 1 \in A \rightarrow x + 1 = 0$

Lembremos que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, logo $V_{p \rightarrow q} = \{-1,1\}$.

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A então $V_{p \rightarrow q} = V_{\sim p} \cup V_q$

5) $p(x) \leftrightarrow q(x)$: x é par $\leftrightarrow x \geq 0$

Lembremos que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, assim $V_{p \leftrightarrow q} = \{-1,0\}$.

Generalizando, se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas em A temos

$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p}$

15. *QUANTIFICADORES*

Podemos transformar sentenças abertas em proposições usando expressões como "para todo", "qualquer que seja", "existe um", etc.

Exemplos

1) Consideremos a sentença aberta p(x): x + 1 = 1. A partir desta sentença podemos formar as seguintes proposições:

Existe x pertencente a *Z*; x + 1 = 1

Para todo x pertencente a *Z*, x + 1 = 1

2) Existe x $\in$ N tal que $\sqrt{x} \in Z$

3) Para todo x $\in$ *Q*, $\sqrt{x} \in R$

4) Qualquer que seja o número natural ele é inteiro

5) Existe um número primo par.

Notamos as expressões "qualquer que seja", "existe", "para todo". Estas expressões chamam-se quantificadores.

É importante notar que uma sentença aberta com todas as variáveis quantificadas é uma proposição, pois ela assume um dos valores F ou V.

Quantificador Universal

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto A e seja V_p o seu conjunto-verdade. Considere as seguintes proposições:

Qualquer que seja x $\in$ A, p(x), ou

Para todo $x \in A$, $p(x)$.

Simbolicamente, temos $\forall x, x \in A, p(x)$.

Se $V_p = A$ então a proposição $\forall x, x \in A, p(x)$ é verdadeira.

Se $V_p \neq A$ então a proposição $\forall x, x \in A, p(x)$ é falsa.

Em outras palavras, dada a sentença aberta $p(x)$ em A, o símbolo $\forall$ referido à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação universal* e ao respectivo símbolo de *quantificador universal*.

Exemplos

1) $\forall x \in N; x \geq 0$ (V)

2) $\forall x \in Q; \sqrt{x} \in R$ (F)

Quantificador existencial

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A e seja V_p o seu conjunto-verdade.

Considere a seguinte proposição:

Existe $x \in A$, $p(x)$, ou

Existe pelo menos um $x \in A$, $p(x)$.

Simbolicamente, temos $\exists x, x \in A, p(x)$.

Se $V_p \neq \varnothing$ então a proposição $\exists x, x \in A, p(x)$ é verdadeira.

Se $V_p = \varnothing$ então a proposição $\exists x, x \in A, p(x)$ é falsa.

Em outras palavras, dada a sentença aberta $p(x)$ em A, o símbolo $\exists$ referido à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação existencial* e ao respectivo símbolo de *quantificador existencial*.

Exemplos

$\exists\ x \in N; x + 1 < 3$ (V)

1) $\exists\ x \in Z; 2x + 1 = 0$ (F)

Negação de proposições com quantificadores

Os quantificadores existencial e universal podem ser precedidos do símbolo de negação (~). Por exemplo, negar a proposição "Todo número primo é ímpar" é afirmar "Nem todo número primo é ímpar" ou "Existe um número primo que não é ímpar". Simbolicamente: $\sim(\forall$ x primo, x é ímpar $) \Leftrightarrow \exists$ x primo, x não é ímpar.

De uma maneira geral temos: $\sim(\forall x; p(x)) \Leftrightarrow \exists x; \sim p(x)$

$$\sim(\exists x; p(x)) \Leftrightarrow \forall x; \sim p(x)$$

Mostrar que uma proposição do tipo "$\forall x \in A; p(x)$" é falsa é mostrar que "$\exists x_o \in A; V(p(x_o)) = F$". Um elemento x_o de A que satisfaz a condição acima é dito um *contra-exemplo*.

16. *ARGUMENTOS E DIAGRAMAS DE VENN*

A teoria dos conjuntos é bastante útil na verificação da validade de determinados argumentos, quando as premissas envolvem proposições quantificadas.

Consideremos o seguinte exemplo:

P_1: Bebês são ilógicos.

P_2: Ninguém é desprezado se pode domar crocodilos.

P_3: Pessoas ilógicas são desprezadas.

Q: Bebês não podem domar crocodilos.

Consideremos:

B = Conjunto dos bebês

I = Conjunto das pessoas ilógicas

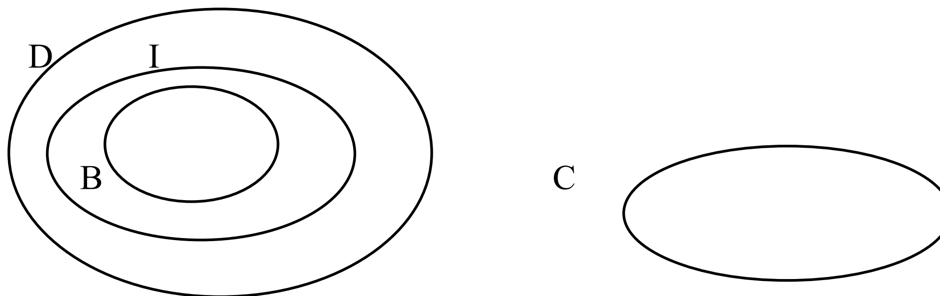
D = Conjunto das pessoas desprezadas

C = Conjunto dos domadores de crocodilos

Das premissas podemos concluir que:

1) $B \subset I$ (P_1) 2) $D \cap C = \varnothing$ (P_2) 3) $I \subset D$ (P_3)

Vejamos o diagrama correspondente:



O diagrama nos mostra que a conclusão é válida

Exemplo

Verifique a validade dos seguintes argumentos através de diagramas de Venn.

1. P_1 : Alguns estudantes são preguiçosos.

   P_2 : Todos os homens são preguiçosos

   Q : Alguns estudantes são homens

Sejam E = conjunto dos estudantes

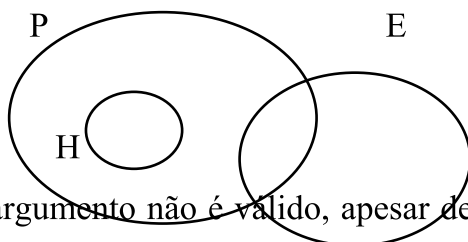
H = conjunto dos homens

P = conjunto dos preguiçosos

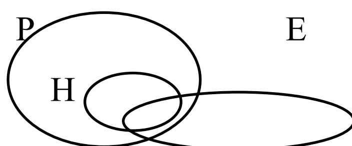
Temos através das premissas que:

1) $E \cap P \neq \varnothing$ (P_1) 2) $H \subset P$ (P_2)

O diagrama abaixo nos mostra uma situação em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.



O argumento não é válido, apesar de podermos construir também um diagrama onde a conclusão é verdadeira.

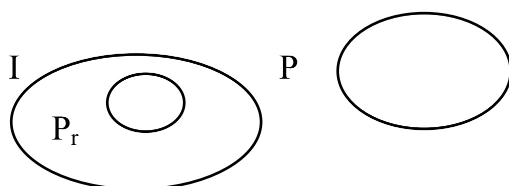


Para concluirmos a validade do argumento a representação do diagrama não pode deixar dúvida quanto a conclusão.

2) P_1 : Todo número primo é ímpar ($P_r \subset I$)

P_2 : Nenhum número ímpar é par ($I \cap P = \varnothing$)

Q : Existe um número primo que é par. ($P_r \cap P \neq \varnothing$)



O argumento não é válido apesar da proposição Q ser "verdadeira". Isto porque a conclusão não decorre das premissas.

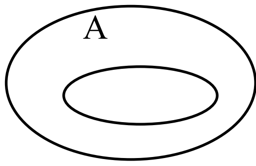
3) P_1 : Todos os advogados são ricos. ($A \subset R$)

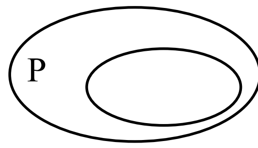
P_2 : Poetas são temperamentais ($P \subset T$)

P_3 : Nenhuma pessoa temperamental é rica ($T \cap R = \varnothing$)

Q : Nenhum advogado é poeta. ($A \cap P = \varnothing$)

R T





A conclusão é válida.

EXERCÍCIOS

1) Considere as proposições p: *Está frio* e q: *Está chovendo*. Traduza para linguagem corrente as seguintes proposição:

a) $p \vee \sim q$ b) $p \rightarrow q$ c) $\sim p \wedge \sim q$ d) $p \leftrightarrow \sim q$ e) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (q \wedge \sim p)$

2) Considere as proposições p: *A Terra é um planeta* e q: *A Terra gira em torno do Sol*. Traduza para linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Não é verdade: que a Terra é um planeta ou gira em torno do Sol.
b) Se a Terra é um planeta então a Terra gira em torno do Sol.
c) É falso que a Terra é um planeta ou que não gira em torno do Sol.
d) A Terra gira em torno do Sol se, e somente se, a Terra não é um planeta.
e) A Terra não é nem um planeta e nem gira em torno do Sol.
(*Expressões da forma "não é nem p e nem q" devem ser vistas como "não p e não q"*)

3) Escreva a negação das seguintes proposições numa sentença o mais simples possível.

a) É falso que não está frio ou que está chovendo.
b) Se as ações caem aumenta o desemprego.
c) d) Ele tem cabelos louros se e somente se tem olhos azuis.
d) A condição necessária para ser um bom matemático é saber lógica.
e) Jorge estuda física mas não estuda química.
(*Expressões da forma "p mas q" devem ser vistas como " p e q"*)

4) Dada a condicional: *"Se p é primo então p = 2 ou p é ímpar"*, determine:

a) a contrapositiva b) a recíproca

5)
a) Supondo $V(p \wedge q \leftrightarrow r \vee s) = F$ e $V(\sim r \wedge \sim s) = V$, determine $V(p \rightarrow r \wedge s)$.
b) Supondo $V(p \wedge (q \vee r)) = V$ e $V(p \vee r \rightarrow q) = F$, determine V(p), V(q) e V(r).
c) Supondo $V(p \rightarrow q) = V$, determine $V(p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$ e $V(p \vee r \rightarrow q \vee r)$.

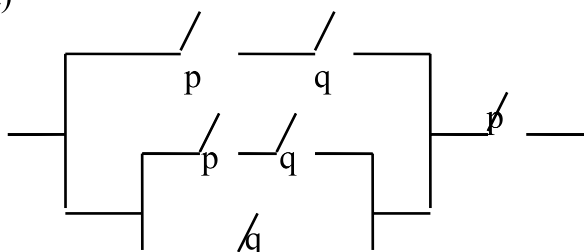
6) Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifique as seguintes proposições:

a) $(p \vee q) \wedge \sim p$
b) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$

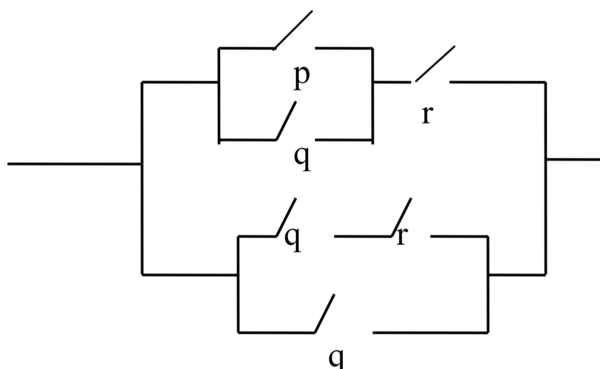
c) $p \wedge (p \vee q) \rightarrow (p \vee q) \wedge q$
d) $\sim(p \rightarrow q) \wedge ((\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q))$
e) $\sim p \rightarrow (p \vee \sim(p \vee \sim q))$

7) Escrever as expressões relativas aos circuitos. Simplificá-las e fazer novos esquemas.

a)



b)



8) Verifique a validade ou não dos seguintes argumentos sem utilizar tabela-verdade:

a) $p \vee q, \sim r \vee \sim q \vdash \sim p \rightarrow \sim r$

b) $p \rightarrow q \vee r, q \rightarrow \sim p, s \rightarrow \sim r \vdash \sim(p \wedge s)$

c) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee s \vdash q \vee r$

d) Se o dëficit público não diminuir, uma condição necessária e suficiente para inflação cair é que os impostos sejam aumentados. Os impostos serão aumentados somente se o déficit público não diminuir. Se a inflação cair, os impostos não serão aumentados. Portanto, os impostos não serão aumentados.

9) Sendo A = {1, 2, 3}, determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\exists\, x \in A;\ x^2 + x - 6 = 0$ b) $\sim(\forall\, x \in A;\ x^2 + x = 6)$
c) $\forall\, x \in A;\ x^2 - 1 < 0$ d) $\sim(\exists\, x \in A;\ |x - 1| \leq 2)$

10) Dê o conjunto-verdade em *R* das seguintes sentenças abertas:

a) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 > 4 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

11) Dê a negação das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in A; p(x)) \wedge (\exists x \in A; q(x))$ b) $(\exists x \in A; p(x)) \rightarrow (\forall x \in A; \sim q(x))$
c) Existem pessoas inteligentes que não sabem ler nem escrever.
d) Toda pessoa culta é sábia se, e somente se, for inteligente.
e) Para todo número primo, a condição suficiente para ser par é ser igual a 2.

12) Use o diagrama de Venn para decidir quais das seguintes afirmações são válidas:

a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos, logo nenhum pássaro é um girassol.

b) Alguns baianos são surfistas. Alguns surfistas são louros. Não existem professores surfistas. Conclusões:

i) Alguns baianos são louros.
ii) Alguns professores são baianos.
iii) Alguns louros são professores.
iv) Existem professores louros.

Respostas:

1)
a) *"Está frio ou não está chovendo"*
b) *"Se está frio então está chovendo"*
c) *"Não está frio e não está chovendo"*
d) "Está frio se e somente se não está chovendo"
e) *"Está frio e não está chovendo se e somente se está chovendo e não está frio"*

2)
a) $\sim(p \vee q)$; b) $p \to q$ c) $\sim(p \vee \sim q)$ d) $\sim p \wedge \sim q$ e) $q \leftrightarrow \sim p$

3)
a) "Não está frio ou está chovendo"
b) *"As ações caem e não aumenta o desemprego"*
c) *"Ele tem cabelos louros e não tem olhos azuis ou ele tem olhos azuis e não tem cabelos louros"*
d) A proposição é equivalente a *"Se é um bom matemático então sabe lógica"* cuja negação é *"É um bom matemático e não sabe lógica"*
e) "Jorge não estuda lógica ou estuda química"

4)
a) contrapositiva: *"Se $p \neq 2$ e p é par então p não é primo"*
b) recíproca: *"Se $p = 2$ ou p é ímpar então p é primo"*

5)
a) Supondo $V(p \wedge q \leftrightarrow r \vee s) = F$ **(1)** e $V(\sim r \wedge \sim s) = V$ **(2)**, determine $V(p \to r \wedge s)$.
Solução: De **(2)** temos que $V(r) = V(s) = F$; Usando estes resultados em **(1)** obtemos: $V(p) = V(q) = V$, logo, $\boldsymbol{V(p \to r \wedge s) = F}$

b) Supondo $V(p \wedge (q \vee r)) = V$ **(1)** e $V(p \vee r \to q) = F$ **(2)**, determine V(p), V(q) e V(r).
Solução: De **(1)** concluimos que $\boldsymbol{V(p) = V}$ e $V(q \vee r) = V$ e de **(2)** temos que $\boldsymbol{V(q)} = F$, logo $\boldsymbol{V(r) = V}$

c) Supondo $V(p \to q) = V$, determine $V(p \wedge r \to q \wedge r)$ e $V(p \vee r \to q \vee r)$.
Solução: Vamos supor $V(p \wedge r \to q \wedge r) = F$. Temos assim que $V(p \wedge r) = V$ e $V(q \wedge r) = F$, o que nos permite concluir que $V(p)=V(r)=V$ e $V(q)=F$, o que contradiz $V(p \to q) = V$. Logo, $\boldsymbol{V(p \wedge r \to q \wedge r) = V}$.
Analogamente, mostramos que $\boldsymbol{V(p \vee r \to q \vee r) = V}$

6) Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifique as seguintes proposições:

a) $(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow F \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow \boldsymbol{(q \wedge \sim p)}$
b) $p \wedge (p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge ((\sim p \vee (q \wedge \sim q))$
$\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee F) \Leftrightarrow p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
c) $p \wedge (p \vee q) \to (p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow \boldsymbol{p \to q}$
d) $\sim(p \to q) \wedge ((\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge ((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \Leftrightarrow$

$(p \wedge \sim q) \wedge ((\sim p \wedge (q \vee \sim q)) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge V) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge \sim p \Leftrightarrow$
$(p \wedge \sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow F \wedge \sim q \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$

e) $\sim p \rightarrow (p \vee \sim(p \vee \sim q)) \Leftrightarrow p \vee (p \vee \sim(p \vee \sim q)) \Leftrightarrow (p \vee (\sim p \wedge q)) \Leftrightarrow$
$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow V \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \boldsymbol{p \vee q}$

7)

a) $(p \wedge q) \vee ((p \wedge q) \vee q) \wedge p \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee q) \wedge p \Leftrightarrow \boldsymbol{q \wedge p}$

b) $((p \vee q) \wedge r)) \vee ((q \wedge r) \vee q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge r) \vee q \Leftrightarrow (p \vee q \vee q) \wedge$
$(r \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee q) \Leftrightarrow \boldsymbol{q \vee (p \wedge r)}$

8) Verifique a validade ou não dos seguintes argumentos sem utilizar tabela-verdade:

a**) *Válido***) b) (*Válido*)

c) ***Sofisma*** - Considerando V(p)=V(q)=V(r) = F e V(s) = V, todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa)

d) Considere p: O déficit público não diminui; q: A inflação cai; r: Os impostos são aumentados.

Analise o argumento: $p \rightarrow (q \leftrightarrow r), r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r \vdash \sim r$ (***Válido***)

9)

a) ***Verdade*** (x = 2) b) ***Verdade***

c) ***Falso*** (x = 1 é um contra exemplo) d) ***Falso***

10) a) **R** - { 2 } b) [−2, 2 [

11)

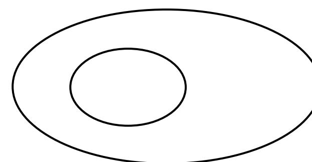
a) $(\exists x \in A; \sim p(x)) \vee (\forall x \in A; \sim q(x)$ b) $(\exists x \in A; p(x)) \wedge (\exists x \in A; q(x))$

c) "Todas as pessoas inteligentes sabem ler ou escrever "

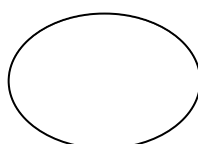
d) "Existe pessoa culta que é sábia e não é inteligente ou que é inteligente e não é sábia"

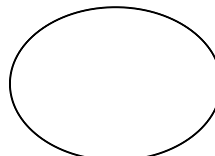
e) "Existe um número primo que é igual a 2 e não é par "

12) a) O diagrama a seguir mostra que o ***argumento é falso:***



b) O diagrama a seguir mostra que o todos os ***argumentos são falsos:***

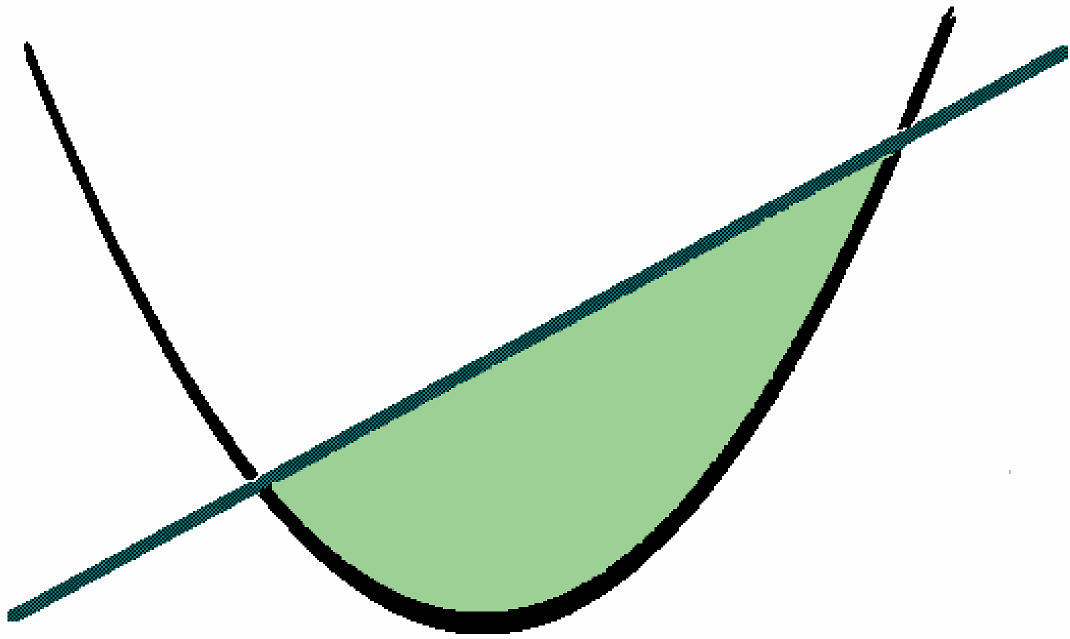




BIBLIOGRAFIA

- Baumgart, Jonh K. - Tópicos da Matemática para uso em sala de aula- Álgebra- Ed. Atual
- Boyer, Carl B. - História da Matemática
- Castrucci, Benedito - Introdução à Lógica Matemática - G.E.E.M - São Paulo
- Filho, Edgard de Alencar - Iniciação à Lógica Matemática - Ed. Nobel - São Paulo
- JR., Frank Ayres - Theory e Problems of Modern Algebra- Schaum's Outline Series

Conjuntos Numéricos Funções



Adelmo Ribeiro de Jesus
Eliana Prates Soares
Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Graça Luzia Dominguez Santos
Ilka Rebouças Freire
Maria Lúcia Borges Gomes
Miriam Fernandes Mascarenhas



Instituto de Matemática - UFBA
Projeto Pró-Ciências / 99
A Matemática e Suas Conexões

ÍNDICE

1. *CONJUNTOS NUMÉRICOS*

1.1. *INTRODUÇÃO*

Uma exposição sistemática dos conjuntos numéricos, utilizados na Matemática, pode ser feita a partir dos números usados para contar, chamados de *números naturais*. Estes números são conhecidos há tantos milênios que o famoso matemático Kronecker disse: "Deus criou os números naturais, todo o resto é obra do homem."

A idéia do número *zero* só apareceu mais tarde, tendo sido introduzido pelos hindus. Uma notação para o mesmo surgiu a partir do século XI quando foi difundido e adotado o sistema de numeração decimal hindu. Este fato foi extremamente importante para a universalização da Matemática na sua forma escrita, uma vez que os seus símbolos são hoje lidos e compreendidos em quase toda parte do mundo. Apesar de historicamente o *zero* não ser um número "natural" (no sentido de usado para contar), incluir ou não o zero como número natural é uma questão de preferência pessoal ou então, de conveniência. Faremos, portanto, a nossa escolha. Usando a simbologia moderna de conjunto:

$$\boldsymbol{N} = \{ 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Da ampliação de $\boldsymbol{N}$ para um conjunto "maior", onde fosse possível a solução de equações do tipo $x + 3 = 2$, por exemplo, surgiram os números negativos, posteriormente incorporados ao conjunto dos números *inteiros*. Dessa forma, temos:

$$Z = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Vale a pena ressaltar que os números negativos já foram chamados de "*numeri absurdi*" e "*numeri ficti*" e só a partir do século XVI foram incorporados à condição de

números por algebristas italianos e, mais tarde, no século XIX, agrupados para formar o conjunto Z.

Os números negativos tiveram uma aceitação relativamente recente. No entanto, problemas envolvendo frações já eram resolvidos pelos babilônios e egípcios, levados pelas necessidades básicas do dia a dia, muitos séculos antes de Cristo. O papiro egípcio Ahmes (ou Rhind) data de 1700 AC e contém, dentre outros, problemas envolvendo frações.

Ampliando então o conjunto dos inteiros para que fosse possível a resolução de equações do tipo 3x = 4, por exemplo, surgiram os números *racionais* que são definidos como: "números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, sendo $p,q \in Z$ e $q \neq 0$". Considerando Q o conjunto dos números racionais temos

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}; p,q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

Algumas observações a respeito da definição de números racionais são necessárias.

Observações

1) A definição de número racional diz: "Um número que pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, ... ". A expressão "pode ser" está sendo utilizado aí porque existem infinitas maneiras de escrever um dado número racional. Por exemplo, usando o fato que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, temos que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$, etc.. É desejável que a definição não dependa da maneira particular escolhida para representar um número. Assim, numa primeira observação de uma expressão nem sempre podemos dizer se ela representa, ou não, um número racional.

Exemplo

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} = 2 \in Q$$

2) Exigimos $q \neq 0$. Esta exigência é necessária pois q é um divisor. Para construirmos um sistema de números onde o quociente entre dois inteiros não apenas exista mas seja único, não podemos permitir a divisão por zero. Vejamos:

$$\frac{p}{q} = b \Leftrightarrow p = b.q, \; q \neq 0.$$

Fazendo $q = 0$ na segunda expressão acima, teríamos

$$p = b.0 = 0.$$

Assim, para $p \neq 0$, não existiria valor para b que tornasse a equação verdadeira e se $p = 0$, existiriam infinitos valores para b.

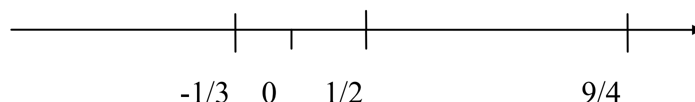
1.2. *O PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO*

A correspondência entre pontos de uma reta e números é um fato bastante natural e útil. Fazemos isso escolhendo dois pontos quaisquer e distintos de uma reta, determinando as posições do 0 e do 1, e considerando a distância entre estes dois pontos como unidade. Convenciona-se escolher o ponto 1 à direita do ponto 0 (chamado origem) de modo que os pontos à esquerda do 0 fiquem associados a números negativos. Assim, a cada ponto fica associado um número, distância do ponto à origem, juntamente com um sinal +, se o ponto estiver à direita do 0, e −, se o ponto estiver à esquerda.

É fácil constatar que todo número racional pode ser representado na reta.

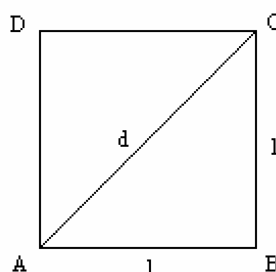
Exemplo

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{9}{4}$



Surge então uma pergunta: Será que os racionais cobrem toda a reta? Ou seja, existem pontos da reta que não representam números racionais?

A descoberta de que existem números que não são racionais foi feita pelos gregos há mais de 2500 anos. Pitágoras e seus discípulos observaram, para sua surpresa, que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário (que, de acordo com o Teorema de Pitágoras, corresponde ao número $\sqrt{2}$) não pode ser expresso como um número racional. Para os gregos esta descoberta foi responsável por uma grande crise na Matemática. De fato, em muitas de suas demonstrações eles supunham que dois segmentos AB e CD quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Este fato é equivalente a dizer que a razão dos seus comprimentos $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ é uma fração. No caso do quadrado de lado unitário e sua diagonal tem-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{1} = d$ não é um número racional.



A demonstração de que d não é um número racional é clássica, bastante intuitiva e de fácil compreensão.

Suponhamos, por absurdo, que

$$d = \frac{p}{q}, \ p,q \in Z, \ q \neq 0$$

e, suponhamos que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = 1+1=2$, ou seja, $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Logo,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2.$$

Temos assim que p^2 é inteiro par; logo p é também par (estamos usando o fato que: p^2 par $\Rightarrow$ p par). Consideremos portanto,

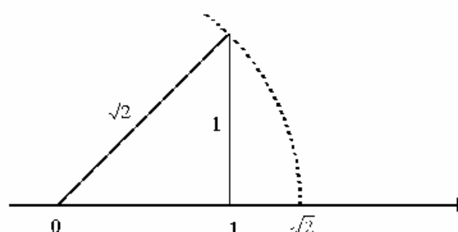
$$p = 2p_1, \quad p_1 \in Z$$

Substituindo na igualdade $p^2 = 2q^2$ obtemos:

$$4p_1^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2p_1^2 = q^2$$

Usando o mesmo raciocínio anterior concluímos que q é par. Chegamos assim à conclusão que p e q são pares, o que contradiz a hipótese inicial de que p e q são primos entre si. Esta contradição mostra que nossa suposição inicial, de que d era uma fração, é falsa.

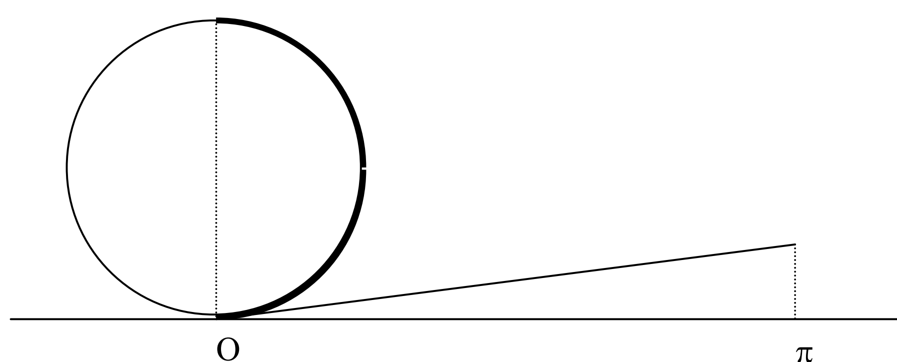
O número d, que identificamos como d = $\sqrt{2}$ não é um número racional, no entanto pode ser representado na reta!

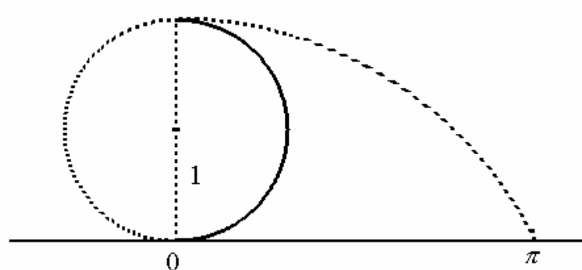


A nossa pergunta inicial fica então respondida: existem pontos da reta que não correspondem a números racionais.

Existem outros números (na verdade uma infinidade) que não são racionais e podem ser representados na reta. Por exemplos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, etc. (A prova de que π não é racional foi dada por Lambert em 1701).

Podemos fazer a representação de π na reta considerando uma semi-circunferência de raio unitário e "retificando-a". O comprimento do segmento correspondente é π.





Estamos prontos, portanto, para definir dentro do nosso ponto de vista "intuitivo" um dos mais importantes conjuntos para a Matemática .

Por números *reais* entendemos a coleção de todos os números associados a todos os pontos da reta. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um dos seus pontos é chamada de *reta real*. Qualquer número real que não é racional diz-se *irracional*, ou seja, não pode ser escrito como a razão entre dois inteiros. Usaremos Q' para representar o conjunto dos números irracionais. Temos que

$$Q' = R - Q; \quad R = Q' \cup Q \quad \text{e} \quad Q' \cap Q = \varnothing.$$

Além disso,

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}.$$

Observações

1) O conjunto dos números irracionais é infinito. Podemos mostrar, por exemplo, que $1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2},\ ...$ são números irracionais. Pode ser provado também que na realidade, o conjunto dos números racionais é muito "pequeno" comparado com o conjunto dos números irracionais.

2) De uma certa forma a construção dos conjuntos numéricos pode ser vista levando em conta a necessidade de resolver equações que aparecem naturalmente em problemas aplicados. Observemos, por exemplo, que se conhecemos apenas o conjunto dos racionais, como podemos resolver uma equação do tipo $x^2 - 2 = 0$? Assim, podemos pensar no conjunto dos reais como uma ampliação de Q. (Devemos lembrar, entretanto, que os números que satisfazem a certos tipos de equações como a citada anteriormente ainda não cobrem *R* como comentaremos adiante). Desta maneira, partindo de *N*, os conjuntos são ampliados na ordem *N, Z, Q e R*. No entanto, historicamente, como vimos, o aparecimento dos números, hoje elementos de tais conjuntos, não respeita esta cronologia.

3) Na linguagem diária, a palavra *irracional* significa algo desprovido de bom senso, contrário à razão. O significado matemático da palavra racional se refere à razão, o quociente de números inteiros; irracional portanto, se refere à ausência de tal razão. O

termo *números reais* é uma outra herança do passado e também não consideramos irreais números que não são reais.

Existe uma outra divisão dos números reais, muito mais recente, em duas categorias: *algébricos e transcendentes* .

Um número real diz-se *algébrico* se satisfaz alguma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros. Se um número não for algébrico é chamado de *transcendente*.

Exemplos

1) Todo número racional é algébrico. De fato:

$$x = \frac{p}{q} \Rightarrow qx = p \Rightarrow qx - p = 0, \quad (p, q \in Z, q \neq 0).$$

2) $\sqrt{2}$ é algébrico.

$\sqrt{2}$ satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

3) Os números π e e são transcendentes. A transcendência de π foi provada por Lindemann em 1882 e a transcendência de e por Hermite em 1873.

Existem portanto duas classificações para os números reais que são:

Reais
- racionais (todos são algébricos)
- irracionais
  - algébricos
  - transcendentes

$$\text{Reais} \begin{cases} \text{algébricos} & \begin{cases} \text{racionais} \\ \text{irracionais} \end{cases} \\ \text{transcedentes} & \text{(todos são irracionais)} \end{cases}$$

1.3. *O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS*

***R* é um corpo**

Estamos tão acostumados a operar com números reais que usamos vários resultados muitas vezes sem nos preocuparmos com o porquê. Por exemplo,

$$x.0 = 0,\ \forall x \quad \text{e} \quad x.y = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0.$$

As justificativas para as afirmações anteriores (e para muitas outras) seguem do fato do conjunto dos números reais ser um *corpo*, isto é, no conjunto dos números reais estão definidas duas operações, a de adição e a de multiplicação que satisfazem os seguintes axiomas:

Dados $x, y \in R$,

C_1) Comutatividade

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x.y = y.x$$

C_2) Associatividade

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x.y).z = x.(y.z)$$

C_3) Distributividade

$$x.(y + z) = x.y + x.z$$

C_4) Existência de Elementos Neutros

$$\exists\ 0 \in R;\ x + 0 = x \quad \text{e} \quad \exists\ 1 \in R;\ x.1 = x \quad \forall x \in R$$

C_5) Existência de Elementos Inversos

$$\forall x \in R,\ \exists\ -x \in R;\ x + (-x) = 0$$

($-x$ é chamado de inverso aditivo ou simétrico de x)

$$\forall x \in R,\ (x \neq 0)\ \exists\ \frac{1}{x} \in R;\ x.\frac{1}{x} = 1$$

($\frac{1}{x}$ é chamado de inverso multiplicativo de x).

Observação

Devido à propriedade associativa, é conveniente denotar por $x + y + z$ (sem parêntesis) a soma $(x + y) + z$ ou $x + (y + z)$ e por $x.y.z$ o produto $(x.y).z$ ou $x.(y.z)$.

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de manipulação com os números reais.

Exemplos

1) $\forall x \in R,\ x.0 = 0$

D] De acordo com C_4 e C_3, temos

$$x.0 = x(0+0) = x.0 + x.0$$

e, portanto,

$$x.0 = x.0 + x.0$$

Somando $-(x.0)$ em ambos os membros temos:

$$(x.0) + (-(x.0)) = (x.0) + (x.0) + (-(x.0))$$

Utilizando C_5, obtemos

$$0 = x.0$$

2) $x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

D] Suponhamos $x.y = 0$ e $y \neq 0$. Vamos mostrar que $x = 0$. De fato:

$$y \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \frac{1}{y} \text{ tal que } y \cdot \frac{1}{y} = 1$$

Logo, multiplicando $x.y = 0$ por $\frac{1}{y}$ e usando a associatividade, obtemos

$$x \cdot (y \cdot \frac{1}{y}) = 0 \cdot \frac{1}{y}$$

Usando C_4 e C_5 e o resultado anterior podemos concluir que $x = 0$.

3) Regras de sinais

i) $-(-x) = x$ (o simétrico do simétrico de x é x)

De fato: A expressão de C_5 que por C_1 é dada por $(-x) + x = 0$, significa que o simétrico de $-x$ é x, ou seja $-(-x) = x$.

ii) $x.(-y) = -(x.y) = (-x).y$

D]

$$x.y + x(-y) \overset{C_3}{=} x.(y + (-y)) \overset{C_5}{=} x.0 = 0$$

Logo, o simétrico de $x.y$ é $x.(-y)$, ou seja, $-(x.y) = x.(-y)$.

iii) $(-x).(-y) = x.y$

D]

$$(-x).(-y) \overset{(ii)}{=} (-(-x).y) \overset{(ii)}{=} -(-(x.y)) \overset{(i)}{=} x.y$$

Em particular, $(-1).(-1) = 1$.

A partir dos axiomas citados definimos *diferença* e *divisão* como a seguir.

Dados $x, y \in R$,

1) $x - y = x + (-y)$

2) $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}, \ \ y \neq 0$

Exemplo

Vamos resolver a equação $-3x + 1 = 4$, observando os axiomas de corpo envolvidos na resolução.

$$-3x+1=4 \Leftrightarrow (-3x+1)+(-1)=4+(-1) \overset{C_2}{\Leftrightarrow} -3x+(1+(-1))=3 \Leftrightarrow$$

$$\overset{C_5}{\Leftrightarrow} -3x+0=3 \overset{C_4}{\Leftrightarrow} -3x=3 \Leftrightarrow (-\frac{1}{3})((-3).x)=(-\frac{1}{3}).(3) \overset{C_2}{\Leftrightarrow} ((-\frac{1}{3}).(-3)).x=-(\frac{1}{3}.3) \Leftrightarrow$$

$$\overset{C_5}{\Leftrightarrow} 1.x=-1 \Leftrightarrow x=-1$$

***R* é ordenado**

Dados dois números reais a e b, quando dizemos que *a* é menor que *b* e usamos o símbolo $a < b$, imaginamos logo que, na representação na reta, *a* e *b* ocupam posições tais que *a* está à esquerda de *b*. Para quaisquer dois números reais *a* e *b* é sempre possível decidir qual é representado na reta à esquerda (ou à direita) do outro. Isto decorre do fato que R é um corpo *ordenado*.

Vamos assumir que todo número que está à direita do zero é dito *positivo*, isto é, existe um subconjunto que indicaremos por R_+^* chamado de conjunto dos *números reais positivos*. Podemos então, introduzir o conceito de ordem em *R*: R_+^* satisfaz aos seguintes axiomas (ou postulados) chamados de axiomas de ordem:

O_1: A soma e o produto de números reais positivos são positivos, ou seja,

$$x, y \in R_+^* \Rightarrow x + y \in R_+^* \ \text{ e } \ x.y \in R_+^*$$

O_2: Dado $x \in R$, exatamente uma das alternativas seguintes ocorre:

$$\text{i) } x = 0; \qquad \text{ii) } x \in R_{+}^{*}; \qquad \text{iii) } -x \in R_{+}^{*}$$

Indiquemos: $R_{-}^{*} = \{x; -x \in R_{+}^{*}\}$; $R_{+} = R_{+}^{*} \cup \{0\}$ e $R_{-} = R_{-}^{*} \cup \{0\}$.

O axioma O_2 diz que

$$R = R_{+}^{*} \cup R_{-}^{*} \cup \{0\}.$$

Conseqüência: Para todo $x \in R$, com $x \neq 0$, temos que $x^2 \in R_{+}^{*}$

Com efeito,

$$x \in R_{+}^{*} \overset{O_1}{\Longrightarrow} x.x = x^2 \in R_{+}^{*}$$

$$x \in R_{-}^{*} \overset{O_2}{\Longrightarrow} -x \in R_{+}^{*} \overset{O_1}{\Longrightarrow} (-x).(-x) = x^2 \in R_{+}^{*}$$

O símbolos $<$ (menor que); $\leq$ (menor ou igual a); $>$ (maior que); $\geq$ (maior ou igual a) são definidos como segue:

1) $a < b \iff b - a$ é positivo

2) $a \leq b \iff b - a$ é positivo ou $a = b$

3) $a > b \iff a - b$ é positivo

4) $a \geq b \iff a - b$ é positivo ou $a = b$

Expressões dos tipos $x < y$, $x \leq y$, $x > y$, $x \geq y$ são chamadas de desigualdades.

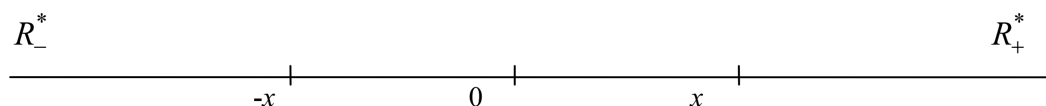
Observações

1) Em particular,

$$x > 0 \iff x - 0 \text{ é positivo} \iff x \in R_{+}^{*}$$

$$x < 0 \iff 0 - x \text{ é positivo} \iff -x \in R_{+}^{*} \iff x \in R_{-}^{*}$$

Os números $x \in R_{-}^{*}$ são chamados de números negativos.



2) A relação de ordem, apresentada em *R*, não pode ser estendida, por exemplo, para os números complexos, de maneira a ser compatível com a soma e o produto.

3) O conjunto *R* não é o único corpo ordenado. Por exemplo, *Q* também é um corpo ordenado.

Valem as seguintes propriedades da relação de ordem em *R*:

P_1) Transitividade

$$\text{Se} \quad x < y \ \text{ e } \ y < z \quad \text{então} \quad x < z$$

D] $x < y$ e $y < z \Rightarrow y - x > 0$ e $z - y > 0 \Rightarrow (y - x) + (z - y) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z - x > 0 \Rightarrow x < z.$

P_2) Tricotomia

Dados x e y $\in$ *R* ocorre exatamente uma das alternativas

$$x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad y < x.$$

D] Dados $x, y \in R$ temos por O_2 que:

$$x - y = 0 \quad \text{ou} \quad x - y \in R_{+}^{*} \quad \text{ou} \quad -(x - y) \in R_{+}^{*}$$

logo,

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

ou

$$x - y \in R_{+}^{*} \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow x > y$$

ou

$$-(x - y) \in R_{+}^{*} \Rightarrow -x + y \in R_{+}^{*} \Rightarrow -x + y > 0 \Rightarrow y > x$$

P_3) Monotonicidade da Adição

Se $x < y$ então para todo $z \in R$ tem-se $x + z < y + z$

D] $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - x + z - z > 0 \Rightarrow (y + z) - (x + z) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + z > x + z.$

P_4) Monotonicidade da Multiplicação

i) Se $x < y$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$

ii) Se $x < y$ então para todo $z < 0$ tem-se $xz > yz$

D]

i) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow z.(y - x) > 0 \Rightarrow zy - zx > 0 \Rightarrow zy > zx$

ii) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow -z.(y - x) > 0 \Rightarrow - zy + zx > 0 \Rightarrow zx > zy$

Consequência :

i) Se $x < 0$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < 0$

ii) Se $x < 0$ então para todo $z < 0$ tem-se $xz > 0$

Alguns comentários sobre inequações

A resolução de uma inequação com uma incógnita consiste na aplicação sucessiva das propriedades das desigualdades, que foram vistas, até se chegar a uma expressão final do tipo $x \leq c$, $x \geq c$, $x < c$ ou $x > c$.

Um dos erros mais frequentes cometidos ao se resolver uma inequação do tipo $\frac{2}{x-1} < -1$ é escrever que $\frac{2}{x-1} < -1$ equivale a $2 < (-1)(x-1)$ para $x \neq 1$. Observemos que o erro vem do fato de não sabermos o sinal de $x - 1$ (Ver propriedade P_4). Quando resolvemos uma inequação todas as etapas podem ser justificadas pelos axiomas de

corpo, pelos axiomas de ordem e as propriedades decorrentes. Vejamos com mais detalhes a resolução da inequação citada acima:

$$\frac{2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < -1 + 1 \overset{C_5}{\Leftrightarrow} \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$$

Analisando o sinal de $x+1$ e $x-1$, concluímos que $x > -1$ e $x < 1$, ou seja, -1 < x < 1.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de subconjuntos reais chamados *intervalos*.

1) $[a,b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$

2) $(a,b] = \{x \in R; a < x \leq b\}$

3) $[a,b) = \{x \in R; a \leq x < b\}$

4) $(a,b) = \{x \in R; a < x < b\}$

5) $(-\infty, b] = \{x \in R; x \leq b\}$

6) $(-\infty, b) = \{x \in R; x < b\}$

7) $[a, +\infty) = \{x \in R; x \geq a\}$

8) $(a, +\infty) = \{x \in R; x > a\}$

9) $(-\infty, +\infty) = R$

Observações

1) A expressão $a \leq x \leq b$ significa que $x \geq a$ e $x \leq b$, assim como, $a < x < b$ significa $x > a$ e $x < b$.

2) Os símbolos $+\infty$ (infinito positivo) e $-\infty$ (infinito negativo) não devem ser confundidos com números reais pois não obedecem as propriedades dos números reais.

3) Os quatro primeiros intervalos são *limitados* com extremos a e b.

4) $[a,b]$ é dito *intervalo fechado* e (a,b) é dito *intervalo aberto*.

5) $[a,b)$ é dito *fechado à esquerda* e $(a,b]$ é dito *fechado à direita*.

6) Quando $a = b$ o intervalo fechado $[a,b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se intervalo degenerado.

EXERCÍCIOS

1) Determine todos os números reais que satisfazem as seguintes desigualdades:

a) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$

b) $\dfrac{x+1}{2+x} \geq \dfrac{x}{3+x}$

2) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeira, prove; se falsa, dê contra-exemplo.

a) Se a e b são irracionais então ab é irracional.

b) Se a e b são irracionais então a + b é irracional.

c) Se a é irracional e b é racional não nulo então ab é irracional.

d) Se a, b, c e d são racionais e α é irracional então

$$a + b\alpha = c + d\alpha \Leftrightarrow a = c \ \text{ e } \ b = d.$$

3) Mostre que os números da forma $m + \sqrt{2}$, $m \in Z$, são irracionais.

4) Dados x, y, z , w $\in R$, prove que:

a) Se $x < y$ e $z < w$ então $x + z < y + w$.

b) Se $x > 0$ então $\dfrac{1}{x} > 0$.

c) Se $0 < x < y$ então $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

d) Se $x > y \geq 0$ então $x^2 > y^2$.

e) Se $x > 0$, $y \geq 0$ e $x^2 > y^2$, então $x > y$.

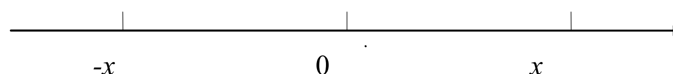
2. *MÓDULO DE UM NÚMERO REAL*

Dado $x \in R$, definimos o módulo (ou valor absoluto) de *x,* e indicamos por $|x|$, como segue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

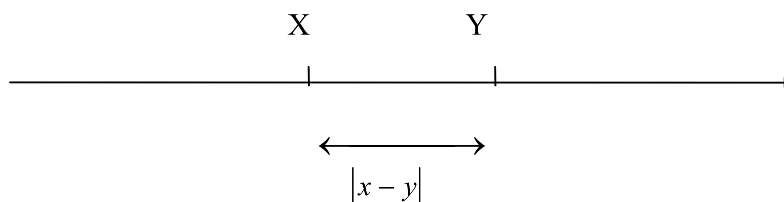
Interpretação Geométrica

O valor absoluto de um número *x* é, na reta, a distância entre o ponto *x* e a origem.



Isto é, |x| corresponde a distância do ponto x ao ponto 0.

Se os números reais *x* e *y* estão associados aos pontos X e Y na reta real, ou seja, são as coordenadas de X e Y, então $|x-y|$ corresponde à distância do ponto X ao ponto Y.



Esta interpretação como distância será de grande utilidade para que se possa enxergar intuitivamente o significado de algumas questões envolvendo módulo.

Observações

1) Temos da definição que $|x| \geq 0$, $\forall$ x $\in$ *R*.

2) $|x| = |-x|$

3) Decorre também da definição que $|x|$ é o maior dos números x e $-x$, o que é indicado como $|x|$ = max $\{-x,\ x\}$. Portanto, $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, o que equivale a $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall x \in R$.

4) É importante lembrar que o símbolo $\sqrt{a},\ a \geq 0,$ é definido como sendo o único número *x* não negativo tal que $x^2 = a$. Da definição de raiz quadrada, temos $\sqrt{x^2} = |x|$.

De fato,

$$\sqrt{x^2} = y,\ y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x, \text{neste caso, } x \geq 0 \\ y = -x, \text{neste caso, } -x \geq 0, \text{ ou seja, } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2} = y = |x|$$

Notemos a diferença deste fato com o cálculo das raízes da equação $x^2 = a$ que são $x = \sqrt{a}$ e $x = -\sqrt{a}$.

Por exemplo, $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = |3|$ e $\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = |-3|$. Por outro lado,

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Exemplo

Vamos resolver as seguintes equações:

1) $|2x+1| = 5$

Temos que

$2x+1 = 5$ ou $2x+1 = -5$

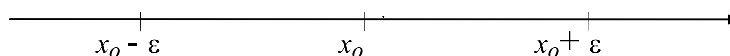
e, portanto, $x = 2$ ou $x = -3$ e o conjunto solução da equação é S = $\{-3, 2\}$.

2) $|9x+2| = -3$

Não existe x pertencente a R tal que $|9x+2| < 0$, logo o conjunto-solução da equação é o vazio, S = ∅.

3) $|x - x_0| = \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$

Temos que $x - x_0 = \varepsilon$ ou $x - x_0 = -\varepsilon$, o que equivale a $x = x_0 + \varepsilon$ ou $x = x_0 - \varepsilon$. Usando a interpretação geométrica, $|x - x_0| = \varepsilon$ significa que o número x (ou o ponto a ele associado no eixo real) está a uma distância ε de x_0.

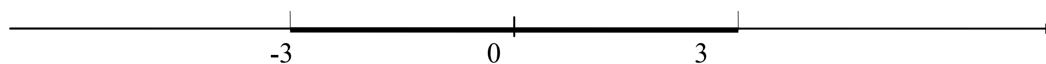


Consideremos agora algumas inequações e suas resoluções.

Exemplos

1) $|x| < 3$

Da interpretação geométrica de $|x|$ temos que a distância de x à origem deve ser menor que 3.

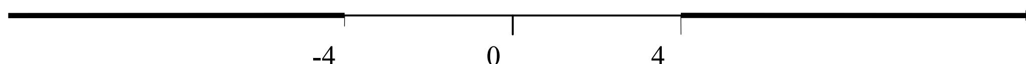


Assim, $-3 < x < 3$.

Chegamos à mesma conclusão usando o fato que $|x|$ = max $\{-x, x\} < 3$. Logo, $-x < 3$ e $x < 3$, o que equivale a $-3 < x < 3$.

2) $|x| > 4$

Ainda usando a interpretação geométrica temos que a distância de x à origem deve ser maior que 4.



Assim, $x < -4$ ou $x > 4$.

Usando o fato que $|x|$ = max $\{-x, x\} > 4$, temos $-x > 4$ ou $x > 4$, ou seja, $x < -4$ ou $x > 4$.

A interpretação que demos para os exemplos anteriores é geral, conforme mostram as proposições seguintes.

Proposição 2.1. Dados $a \in R$, $a > 0$ e $x \in R$;

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

D]

1) Mostraremos que $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$.

Usando que $|x|$ = max $\{-x, x\}$, temos que

$-x \leq |x| < a \Rightarrow x > -a$ (I)

$x \leq |x| < a \Rightarrow x < a$ (II)

De (I) e (II) concluímos $-a < x < a$

2) Mostraremos que $-a < x < a \Rightarrow |x| < a$.

i) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$. Por hipótese $x < a$, logo $|x| < a$.

ii) Se $x < 0$ então $|x| = -x$. Por hipótese $-a < x$, ou seja, $-x < a$. Assim, $|x| < a$.

Observação

Na hipótese da Proposição 2.1. temos $a > 0$. Se $a \leq 0$ temos uma inequação sem solução $|x| < a \leq 0$.

Proposição 2.2. Dados $a \in R, \quad a > 0$ e $x \in R$;

$$|x| > a \iff \mathrm{x} < -a \text{ ou } x > a$$

D]

1) Mostraremos que $|x| > a \Rightarrow \mathrm{x} < -a$ ou $x > a$.

i) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$ e como $|x| > a$, temos $x > a$.

ii) Se $x < 0$ então, $-x = |x| > a$, isto é, $-x > a$, ou seja, $x < -a$.

2) Mostraremos que $\mathrm{x} < -a$ ou $x > a \Rightarrow |x| > a$.

Usando que $|x|$ = max $\{-x, x\}$, temos que

$a < x \leq |x| \Rightarrow |x| > a$ ou

$a < -x \leq |x| \Rightarrow |x| > a$

Observação

Na hipótese da Proposição 2.2. temos $a > 0$. Se $a < 0$, todo $x \in R$ é solução da inequação $|x| > a$ e se $a = 0$, todo $x \in R^*$ é solução da inequação $|x| > 0$

Exemplos

Vamos resolver as seguintes inequações:

1) $|2x-5|<3$

$$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow 2<2x<8 \Leftrightarrow 1<x<4.$$

2) $|6-2x|\geq 7$

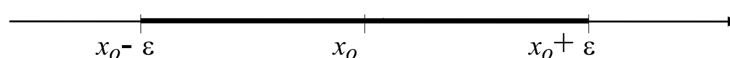
$$|6-2x|\geq 7 \Leftrightarrow 6-2x\geq 7 \text{ ou } 6-2x\leq -7 \Leftrightarrow -2x\geq 1 \text{ ou } -2x\leq -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x\geq \frac{13}{2}.$$

3) $|x-x_0|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$

$$|x-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x-x_0<\varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

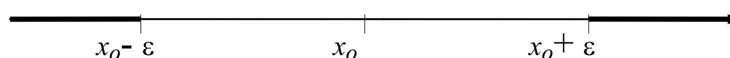
A interpretação geométrica nos diz que que a distância de x a x_0 é menor que ε, logo x deve estar entre $x_0-\varepsilon$ e $x_0+\varepsilon$, ou seja, $x \in]\, x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$.



4) $|x-x_0|>\varepsilon$, $\varepsilon>0$

$$|x-x_0|>\varepsilon \Leftrightarrow x-x_0<-\varepsilon \text{ ou } x-x_0>\varepsilon \Leftrightarrow x<x_0-\varepsilon \text{ ou } x>x_0+\varepsilon$$

A interpretação geométrica nos diz que que a distância de x a x_0 é maior que ε, logo x deve estar antes de $x_0-\varepsilon$ ou depois de $x_0+\varepsilon$, ou seja, $x \in]-\infty, x_0-\varepsilon[\cup]x_0+\varepsilon, +\infty[$



Proposição 2.3. Dados $x, y \in R$, temos que $|x.y| = |x|.|y|$.

D]

Temos três casos a considerar.

i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos $x.y \geq 0$, portanto, $|x.y| = x.y = |x|.|y|$.

ii) Se $x < 0$ e $y < 0$, temos $x.y > 0$, e portanto, $|x.y| = x.y = (-x).(-y) = |x|.|y|$.

iii) Se $x \geq 0$ e $y < 0$, temos $x.y \leq 0$, e portanto, $|x.y| = -(x.y) = x.(-y) = |x|.|y|$.

Observação

Se já são conhecidas as propriedades das raízes podemos demonstrar, mais diretamente, como a seguir:

$$|x.y| = \sqrt{(x.y)^2} = \sqrt{x^2.y^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x|.|y|$$

Proposição 2.4. Dados $x, y \in R$, $y \neq 0$, temos que $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

D]

Usando o fato que $\frac{1}{|y|} = \left|\frac{1}{y}\right|$, (que pode ser facilmente demonstrado separando-se em dois casos: $y > 0$ e $y < 0$) e a Proposição 2.3. temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x.\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = |x|\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Proposição 2.5. (Desigualdade Triangular). Dados $x, y \in R$, temos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

D]

Temos três casos a considerar.

i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $x + y \geq 0$ e, portanto,

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

ii) Se $x < 0$ e $y < 0$ então $x + y < 0$, portanto,

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|$$

iii) Se $x \geq 0$ e $y < 0$, temos

$$y < -y = |y|, \quad -x \leq x = |x| \quad \text{e} \quad x + y \geq 0 \quad \text{ou} \quad x + y < 0.$$

Daí,

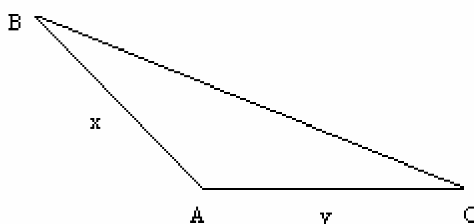
$$\text{se } x + y \geq 0, \text{ então } |x + y| = x + y < x + (-y) = |x| + |y|$$

e

$$\text{se } x + y < 0, \text{ então } |x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$$

Observação

A desigualdade triangular tem esse nome devido à sua interpretação geométrica no plano: Dado o triângulo ABC e considerando $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, temos que $\overline{BC} < x + y$. A igualdade ocorre quando os pontos A, B e C são colineares.



EXERCÍCIOS

1) Resolva:

a) $|x|+|x-5|=8-x$

b) $|5x+4|\geq 4$

c) $|x-2|-|x-4|\leq 1-x$

d) $|x+1|+|x-2|>4$

e) $\dfrac{|x+1|}{|2x-1|}\leq 2$

2) Prove que para todo x, y $\in$ R, valem as seguintes relações:

a) $\dfrac{1}{|y|}=\left|\dfrac{1}{y}\right|$, y $\neq 0$

b) $|x-y|\leq |x|+|y|$

c) $|x|-|y|\leq |x-y|$

3. *FUNÇÃO. NOÇÕES FUNDAMENTAIS*

3.1. *INTRODUÇÃO*

Observamos, no dia a dia, que muitos objetos ou grandezas estão relacionados. Por exemplo, trabalhando com números reais estamos sempre comparando uns com outros utilizando as expressões “maior do que”, “menor do que”. Em nossas famílias as pessoas estão naturalmente relacionadas como “irmão de”, “pai de” etc., além das comparações subjetivas: “mais inteligente do que”, “mais bonita do que”, “menos rico que”, etc.

Matematicamente, se temos dois conjuntos A e B e podemos estabelecer uma “ligação” dos elementos de A com os elementos de B, dizemos que temos uma “relação” de A em B. Nosso interesse, entretanto, é o estudo de um tipo especial de relação que faz corresponder a cada elemento de A um único elemento de B. Tal relação é chamada *função*.

As leis que descrevem fenômenos da natureza, em que geralmente o valor de uma grandeza depende do valor de uma segunda, são funções entre conjuntos e são de grande importância nas Ciências. Vejamos alguns exemplos.

A pressão da água do mar é função da profundidade. (Nossos ouvidos sentem isso quando mergulhamos cada vez mais fundo).

A lei da queda de um corpo, descoberta por Galileu (1564-1642), afirma que o espaço percorrido por um corpo que cai é proporcional ao quadrado do tempo gasto em percorrê-lo, sendo, portanto, função do tempo.

Se um gás é encerrado num certo recipiente e mantido a uma temperatura fixa, então o produto do volume pela pressão a que o mesmo está submetido é constante, ou seja, o volume é inversamente proporcional à pressão. Essa relação entre volume e pressão de um gás é conhecida como “Lei de Boyle e Mariotte”, foi descoberta em 1676, e nos diz que o volume do gás é função da pressão.

O custo de fabricação de um determinado produto é função do número de unidades fabricadas.

Vimos alguns exemplos de função em diversas áreas do conhecimento. Este é um dos motivos porque o conceito de função é fundamental. Praticamente toda a Matemática se constrói em torno deste conceito e é através de funções que as conexões da Matemática com as demais ciências se tornam bastante evidentes.

3.2. *CONCEITOS FUNDAMENTAIS*

Vejamos agora a definição matemática de função.

Dados os conjuntos A e B, não vazios, uma *função f* de A em B é uma regra, ou conjunto de instruções, que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. O conjunto A chama-se *domínio* e o conjunto B *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in A$, o único elemento $y \in B$ associado a x denomina-se *imagem* de x pela função f ou o valor assumido pela função f no ponto x.

Indicamos a função f de A em B por

$$f : A \to B,$$

o domínio de f por D(f), a imagem de x pela função f, por $f(x)$ e o conjunto $\{y = f(x),\ x \in A\}$, chamado de *conjunto imagem da função f*, por Im(f).

Uma função f de A em B também pode ser indicada por

$$A \overset{f}{\to} B$$

ou

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Observações

1) As letras x e y que aparecem na expressão $y = f(x)$ são denominadas *variáveis*. O valor numérico da variável y, em geral, é determinado pelo valor de x. Por esta razão, muitas vezes, y é chamado de *variável dependente* e x variável *independente*.

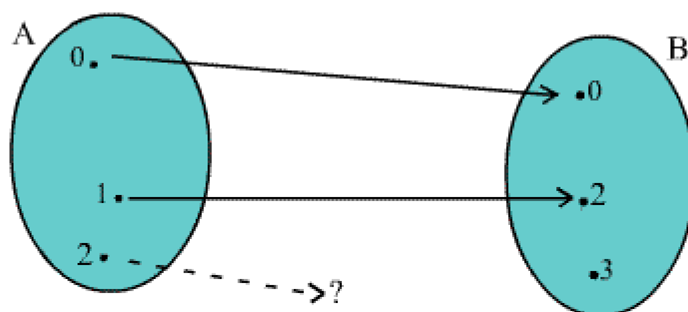
2) Em geral trabalhamos com funções $f: A \to B$, onde A e B são conjuntos numéricos e a regra $x \mapsto f(x)$ exprime o valor $f(x)$ por meio de uma expressão que envolve x. No entanto, a regra que nos ensina a obter $f(x)$, dado x, é inteiramente arbitrária, desde que cumpra as seguintes condições:

a) Se A é o domínio de f então podemos obter $f(x)$, qualquer que seja $x \in$ A .

b) A cada $x \in$ A, a regra $f(x)$ deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B.

Exemplos

1) Sendo A = { 0, 1, 2 }, B = { 0, 2, 3 } e $f(x) = 2x$, f não é uma função de A em B pois não existe elemento $y \in$ B tal que $y = f(2)$.



2) Sejam A = { 0, 1 } e B = { −1, 0, 1 } e vamos considerar y = f(x) tal que $y^2 = x$. f não é uma função de A em B pois f(1) = 1 e f(1) = −1.

3) Sejam A = { 1, 2, 3 }, B = { 0, 1, 2, 3 } e a função $f: A \to B$ tal que, f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2.

Observações

1) Devemos distinguir o significado dos símbolos x, f(x) e f: f é a função, $x \in$ A e f(x) $\in$ B é a imagem do elemento x pela função f. Em alguns casos nos referimos à função f como sendo "a função *f(x)*". Por exemplo, dizemos: "a função $f(x) = \operatorname{sen} x$", "a função $f(x) = \sqrt{x}$", etc.

2) Para se definir uma função são necessários o domínio, o contra-domínio e a lei de formação y = f(x). No entanto, é muito comum utilizar apenas a lei de formação para representar f. Neste caso deve-se considerar o domínio e o contra-domínio de f como

os mais amplos possíveis dentro do universo que se está trabalhando. Por exemplo, ao dizermos "a função $f(x) = \frac{1}{x}$, estamos considerando a função

$$\begin{aligned} f: R^* &\to R \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}.$$

Vejamos alguns exemplos práticos de função dados por suas respectivas leis.

Exemplos

1) Para estudar a taxa do nível de aprendizagem dos animais, um grupo de estudantes de Psicologia fez uma experiência na qual um rato branco era enviado, repetidamente, através de um labirinto. Os estudantes notaram que o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto, na n-ésima tentativa, era de, aproximadamente, $f(n) = 3 + \frac{12}{n}$ minutos.

2) No estudo das condições ambientais de uma comunidade, concluiu-se que a taxa média diária de monóxido de carbono do ar é de $c(p) = 0{,}4p + 1$ partes por milhão, quando a população for de p milhares.

3) Biólogos descobriram que a velocidade do sangue arterial é função da distância do sangue ao eixo central da artéria. De acordo com tal função, chamada de *Lei de Poiseuille*, a velocidade (em centímetros por segundo) do sangue, que está a r centímetros do eixo central da artéria, é dada por $s(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante e R é o raio da artéria.

4) Se uma bola é jogada de cima de um edifício com 256 metros de altura, então a altura da bola (em metros), em relação ao solo, em cada instante t (em segundos), pode ser dada pela função $h(t) = -5.t^2 + 256$, se desconsideramos a resistência do ar.

Igualdade de funções

Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se, e somente se, A = C, B = D e f(x) = g(x), $\forall$ x $\in$ A.

Exemplo

As funções

$$f: \{\ 0,\ 1,\ 2\ \} \to R \qquad\qquad g: \{\ 0,\ 1,\ 2\ \} \to R$$
$$x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x - 3} \qquad \text{e} \qquad x \mapsto x + 3$$

são iguais pois têm domínio e contra-domínio iguais e, além disso, f(0) = g(0) = 3, f(1) = g(1) = 4 e f(2) = g(2) = 5.

Por outro lado, se não especificamos os respectivos domínios de $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ e $g(x) = x + 3$, fica entendido, como observamos anteriormente, que D(*f*) =*R* − {3} e D(g) = *R* e, portanto, f e g não são iguais.

Uma função $f: A \to B$ é chamada de *função real* quando $B \subset R$ e, de *variável real* quando $A \subset R$.

Exemplos

1) A área A de um círculo é função do raio r, A = π . r^2.

2) A área de um retângulo é função do seu comprimento x e de sua largura y, A = xy.

3) Os juros J de uma aplicação é função de quanto se aplica, o capital C, do tempo de aplicação t e de uma taxa estabelecida i, $J = \frac{Cit}{100}$.

Nos exemplos anteriores temos funções reais de uma, duas e três variáveis respectivamente.

Trabalharemos com funções reais de uma variável real , isto é, aquelas em que domínio e contra-domínio são subconjuntos de *R*. Como já salientamos, neste caso, se conhecemos apenas a lei de formação $y = f(x)$ fica convencionado que o domínio de f é o subconjunto de R o mais amplo possível, ou seja, o maior subconjunto de R no qual é possível determinar a imagem $f(x)$, e o contra-domínio de f é R.

3.3. O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Procuraremos sempre associar uma função à sua representação gráfica, mostrando que, através do seu gráfico, podemos fazer um estudo geral das suas propriedades.

Vejamos, inicialmente, uma breve revisão sobre o produto cartesiano.

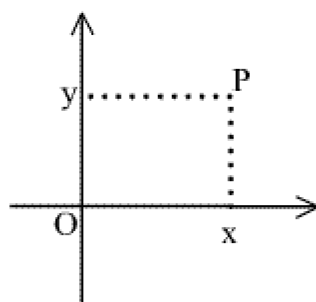
Um *par ordenado* $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de *primeira coordenada* de P e um objeto y chamado de *segunda coordenada* de P. Dois pares ordenados $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ serão chamados iguais quando $x = u$ e $y = v$, isto é, quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada.

O *produto cartesiano* A x B de dois conjuntos A e B é o conjunto A x B formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que x pertence a A e y pertence a B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{ (x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respectivamente, então o produto cartesiano é finito e possui m.n elementos.

$R \times R = R^2$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano, sendo o exemplo que deu origem à idéia geral.



Os elementos (x, y) de R^2 são os pares ordenados de números reais. Eles são as chamadas *coordenadas cartesianas* de um ponto P do plano Π, quando se fixa neste plano um par de eixos ortogonais Ox e O*y* que se interceptam no ponto O, chamado de *origem* do sistema de coordenadas. A primeira coordenada do ponto P, *x*, é chamada de *abscissa* e a segunda coordenada *y*, é chamada de *ordenada*. Os eixos O*x* e O*y* são chamados respectivamente de eixos das abscissas e eixo das ordenadas.

Dado um ponto P do plano, a abscissa de P é o número *x*, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo O*x*, enquanto a ordenada de P é a coordenada *y* do pé da perpendicular baixada de P sobre O*y*. Diz-se então que (x, y) é o par de coordenadas do ponto P relativamente ao sistema de eixos *x*O*y*.

Os eixos O*x* e O*y* dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. No primeiro quadrante tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Podemos associar a cada ponto P do plano Π seu par de coordenadas, através da função $f : \Pi \rightarrow \mathrm{R}^2$; $f(\mathrm{P}) = (x, y)$. Esta função traduz conceitos e propriedades geométricos para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpreta geometricamente relações entre números reais. Podemos dizer que R^2 é o modelo aritmético do plano Π enquanto que Π é o modelo geométrico de R^2.

Esta relação entre a Aritmética/Álgebra de um lado, e a Geometria de outro, permitirá um melhor entendimento das funções reais que iremos estudar.

O *gráfico* de uma função $f: A \to B$ é o subconjunto G(f) do produto cartesiano A x B formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Simbolicamente:

$$\mathrm{G}(f) = \{(x, y) \in \mathrm{AxB};\ y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in \mathrm{A}\}.$$

A fim de que um subconjunto $\mathrm{G} \subset \mathrm{AxB}$ seja o gráfico de alguma função $f: A \to B$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

G_1: Para todo $x \in$ A existe um par ordenado (x, y) $\in$ G cuja primeira coordenada é x.

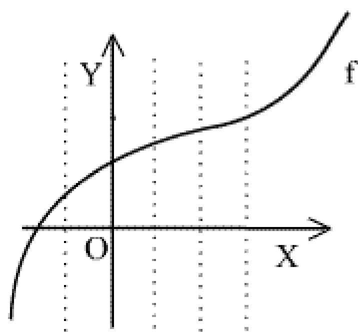
G_2: Se P = (x, y) e P'= (x, y') são pares pertencentes à G com a mesma primeira coordenada x, então $y = y'$, isto é, P = P'.

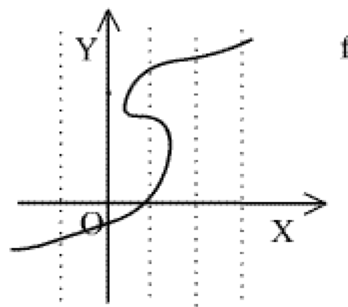
As condições G_1 e G_2 significam, em outras palavras, que para cada $x \in$ A existe um, e somente um, $y \in$ B tal que (x, y) $\in$ G.

O gráfico de uma função real de variável real $f: \mathrm{A} \to R$; A $\subset R$ é um subconjunto do plano cartesiano R^2, logo, pode, em geral, ser visualizado como uma linha formada pelos pontos de coordenadas (x, $f(x)$), quando x varia no conjunto A .

No caso de funções reais de uma variável real, as condições G_1 e G_2 tomam uma forma mais geométrica podendo ser resumidas assim:

Seja A $\subset R$ um conjunto que consideramos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto G $\subset R^2$ é o gráfico de uma função $f: \mathrm{A} \to R$, se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical traçada a partir de um ponto de A, intercepta G num único ponto.





Representa o gráfico de uma função

Não representa o gráfico de uma função

EXERCÍCIOS

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{x-1}}$

d) $f(x) = \sqrt{-(x^2-9)^2}$

2) Para estudar a taxa do nível de aprendizagem dos animais, um grupo de estudantes de Psicologia fez uma experiência na qual um rato branco era enviado, repetidamente, através de um labirinto. Os estudantes notaram que o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto, na n-ésima tentativa, era de, aproximadamente, $f(n) = 3 + \dfrac{12}{n}$ minutos.

a) Qual o domínio da função dada pela sentença $f(n) = 3 + \dfrac{12}{n}$?

b) Quais os valores para n que fazem sentido no contexto do problema?

c) Quanto tempo o rato gastou para percorrer o labirinto na 3ª tentativa?

d) De acordo com a função f, com o aumento do número de tentativas, que acontecerá com o tempo requerido para o rato percorrer o labirinto? O rato conseguirá percorrer o labirinto em menos de três minutos?

3) Estima-se que a população de uma certa comunidade, daqui a t anos, será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares.

a) Qual o domínio da função dada pela sentença $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$?

b) Daqui a 9 anos qual será a população da comunidade?

c) De quanto crescerá a população durante o 9º ano?

d) Ao longo do tempo o que acontecerá com essa população?

4) A mudança de temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente (considerada constante) . Expresse essa mudança como função da temperatura do objeto.

5) A média de propagação de uma epidemia é proporcional ao número de pessoas que estão com a doença e ao número de pessoas que não estão doentes. Expresse essa média em função do número de pessoas que estão doentes.

(*Obs. Uma grandeza* $\underline{z}$ *é dita diretamente proporcional a duas outras grandezas* $\underline{w}$ *e* $\underline{u}$ *se* $z=k.(w.u)$ *para algum* $k \in R$*)*

4. *A FUNÇÃO AFIM*

Uma função $f: R \to R$ chama-se *afim* quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$.

Casos particulares

1) A função *identidade* $f: R \to R$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in R$.

2) A função linear $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in R$.

3) A função *constante* $f: R \to R$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in R$.

Observações

1) Quando $a \neq 0$, a função afim também é chamada *função polinomial do primeiro grau.*

2) Devido ao fato que $b = f(0)$ na expressão $f(x) = ax + b$, o coeficiente b é às vezes chamado de *valor inicial* da função *f*.

3) A função linear dada por $f(x) = ax$ é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Exemplos

1) Se um corpo se desloca em linha reta com velocidade constante v_o, então $s(t) = v_o t + s_o$ dá a posição s do corpo em relação à uma origem fixa na reta, onde s_o é a posição para $t = 0$.

2) Se uma pessoa fica exposta a temperaturas muito baixas (ou muito altas), durante algumas horas, a temperatura de seu corpo pode cair (ou subir), e tal pessoa pode, inclusive, vir a morrer. Todavia, sob temperaturas ambientes de 16°C a 54° C, nosso corpo é capaz de manter, indefinidamente, uma mesma temperatura. Este fato pode ser representado pela seguinte função constante: f: $[16,54] \to R$; $f(x) = 36,7$.

3) Pendurando-se um corpo numa mola, ela sofrerá um alongamento S, que é função do peso *p* do corpo suspenso. Em 1660 o inglês Hooke descobriu experimentalmente que, dentro de certas condições, tal função é linear, isto é, dada por S = k*p*, onde k é uma constante que depende da mola.

4) Em modelos simplificados, o *custo* de fabricação de *x* unidades de um produto é composto por uma despesa fixa, chamada de *custo fixo*, mais uma parte variável que depende do número de unidades produzidas. Assim, se o fabricante de um determinado produto tem uma despesa fixa mensal de c_o reais e um custo de produção de a reais por unidade, o custo de produção de *x* unidades mensais deste produto é dado por $C(x) = ax + c_o$ reais.

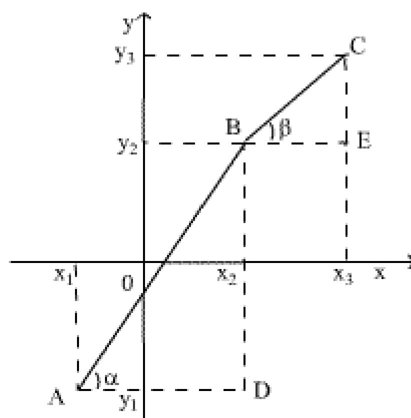
Apesar de termos definido a função afim e seus casos particulares como funções de domínio *R*, nos exemplos que vimos, que são situações práticas, os domínios considerados são subconjuntos de *R*. As respectivas funções são, na verdade, *restrições* da função afim a esses subconjuntos.

O gráfico da função afim

Podemos verificar que dados três pontos distintos do gráfico da função afim, esses pontos são colineares, ou seja, tal gráfico é uma reta. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos distintos do gráfico de $f(x) = ax + b$. Podemos supor que $x_1 < x_2 < x_3$ e sabemos que $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = a x_2 + b$ e $y_3 = a x_3 + b$. Daí obtemos,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

Se $a > 0$, $y_2 > y_1$ e $y_3 > y_2$, podemos ter a seguinte figura



Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e portanto os ângulos α e β são iguais. Logo, A, B e C estão alinhados.

Se $a < 0$ o raciocínio é análogo.

Se $a = 0$ temos que $y_1 = y_2 = y_3$ teremos os pontos A, B e C alinhados e sobre uma reta paralela ao eixo Ox, que é o gráfico da função constante.

Conclusão: Para construir o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é suficiente encontrar dois pontos distintos do gráfico e traçar a reta que passa por esses pontos.

O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo Oy. Reciprocamente, podemos provar que toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.

Se $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, diz-se que $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ é a equação da reta r .

Se a reta r é o gráfico da função afim $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, o coeficiente $\mathrm{a} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r, é chamado *inclinação* ou *coeficiente angular* da reta r, pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo θ que a reta r faz como eixo Ox.

$$\mathrm{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \mathrm{tg}\theta$$

Uma vez que o ponto (0, b) corresponde ao ponto que a reta r intercepta o eixo Oy, o número b é também chamado de *coeficiente linear* da reta r.

Chama-se *zero* de uma função f, o ponto x, $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$.

Se f:A →R, com A ⊂ R, então graficamente o ponto $(x, f(x))$ tal que $f(x) = 0$ representa a interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

No caso da função afim , se $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ o zero de f é o ponto $x = -\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$, se $\mathrm{a} \neq 0$.

Se a = 0 temos dois casos: a função não tem zero (para b ≠ 0) ou tem infinitos, se b = 0.

EXERCÍCIOS

1) Sabe-se que se um corpo se desloca em linha reta com velocidade constante v_o, então $s(t) = v_o t + s_o$ dá a posição s do corpo em relação à uma origem fixa na reta, onde s_o é a posição para $t = 0$. Numa longa estrada retilínea, um Gol e um Passat deslocam-se no mesmo sentido com velocidades constantes de 80km/h e 60km/h, respectivamente No instante $t = 0$, o Gol está no quilômetro 5 e o Passat no quilômetro 20.

a) Qual a lei que representa a posição do Gol? E do Passat?

b) Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções encontradas no item a). Existe interseção? Qual o significado disto no problema?

c) Refaça o problema com os carros a 80km/h e 60km/h mas em sentidos contrários, numa estrada de mão dupla. Interprete o ponto de interseção dos gráficos.

2) A medida de temperatura em graus Fahrenheit é uma função afim da medida em graus centígrados. Escreva a equação desta função sabendo que 0°C = 32°F e 100°C = 212°F.

3) Durante o verão, um grupo de estudantes alugou um quarto para confeccionar produtos de artesanato. O preço do aluguel foi de R$100,00 e o custo do material necessário para cada produto foi de R$1,50. Expresse o custo total em função do número de produtos confeccionados.

4) O aluguel de um carro em uma agência é de R$ 50,00 mais R$ 0,80 por quilômetro rodado. Uma segunda agência cobra R$ 60,00 mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. Qual a agência que oferece o melhor preço de aluguel?

5) O herói de uma história popular de espionagem conseguiu fugir após ter sido aprisionado por inimigos. Nosso herói, dirigindo um caminhão roubado a 72km/h está a 40km de distância de seus inimigos. Estes, ao perceberem a fuga, tentarão alcançá-lo

dirigindo um carro a 168km/h. A distância entre o lugar onde o herói esteve prisioneiro e a fronteira da liberdade é de 83,8km. Poderá nosso herói alcançá-la?

6) Um indivíduo dispara um projétil com velocidade de 200m/s sobre um alvo. Ele ouve o impacto do projétil no alvo, 2,7 segundos depois do disparo. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é de 340m/s, qual a distância do indivíduo ao alvo?

7) Para encorajar pessoas ao uso do sistema de transporte solidário, o Departamento de Trânsito de um Estado ofereceu um desconto especial no pedágio para veículos transportando 4 ou mais pessoas. Há trinta dias, durante o horário matinal de maior movimento de carros, apenas 157 veículos obtiveram o desconto. Desde então, o número de veículos com direito ao desconto aumentou numa razão constante. Hoje, por exemplo, 247 veículos receberam o desconto.

a) Expresse o número de veículos com direito a desconto, em cada manhã, como função do tempo e construa o gráfico correspondente.

b) Daqui a 14 dias, quantos veículos terão direito ao desconto?

8) Os produtos farmacêuticos devem especificar as dosagens recomendadas para adultos e crianças. Duas fórmulas de modificação da dosagem de adulto para uso por crianças são:

$$\text{Regra de Cowling:} \quad y = \frac{1}{24}(t+1)a$$

$$\text{Regra de Friend:} \quad y = \frac{2}{25}ta$$

onde a denota a dose de adulto (em miligramas) e t a idade da criança (em anos).

a) Se a = 100, faça o gráfico das duas equações, no mesmo sistema de eixos, para $0 \le t \le 12$.

b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

9) O manual de Imposto de Renda de 1997 estabeleceu as seguintes regras para cálculo do imposto

RENDA LÍQUIDA	ALÍQUOTAS	PARCELA A DEDUZIR
Até 10.800,00	Isento	
Acima de 10.800,00 até 21.600,00	15 %	1.620,00
Acima de 21.600,00	25 %	3.780,00

Isso significa que o Imposto de Renda a pagar é uma função da renda líquida x expressa por

$$f(\text{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 10.800 \\ 0{,}15x - 1.620, & \text{se } 10.800 < x \leq 21.600 \\ 0{,}25x - 3.780, & \text{se } x > 21.600 \end{cases}.$$

Construa o gráfico dessa função.

5. *FUNÇÕES CRESCENTE E DECRESCENTE*

Uma função *f*, real de variável real, diz-se *crescente* em I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

f diz-se *estritamente crescente* em I, se e somente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

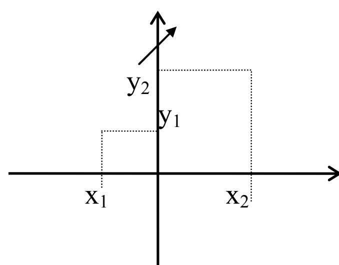
Uma função *f*, real de variável real, diz-se *decrescente* em I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:

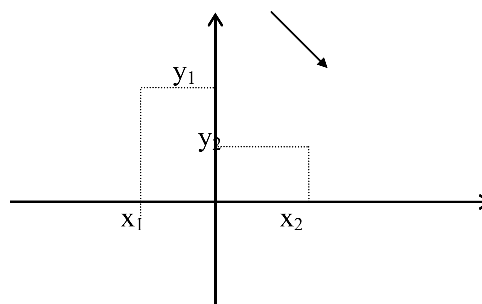
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

f diz-se *estritamente decrescente* em I, se e somente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Gráficos





Proposição

A função $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente para $a > 0$ e estritamente decrescente para $a < 0$.

D] Vamos demonstrar o caso $a > 0$. O outro é análogo.

Suponhamos $a > 0$ e sejam $x_1, x_2 \in R$; $x_1 < x_2$, ou seja,

$$x_1 - x_2 < 0 \qquad (1).$$

Temos que $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2)$. De (1) e do fato que $a > 0$ concluímos que

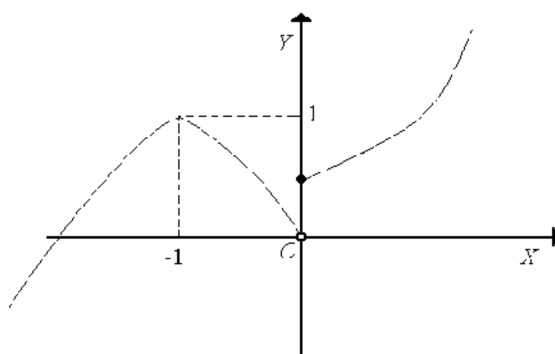
$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

EXERCÍCIOS

1) Mostre que a função $f(x) = ax + \text{b}$ decrescente, se $a < 0$.

2) A função $\text{f(x)} = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \le 4 \\ x-4, & \text{se } x > 4 \end{cases}$ é crescente em R ?

3) Em que intervalos reais a função cujo o gráfico é apresentado a seguir é crescente? E decrescente?



4) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente em $(-\infty, 0) \cup (0,+\infty)$?

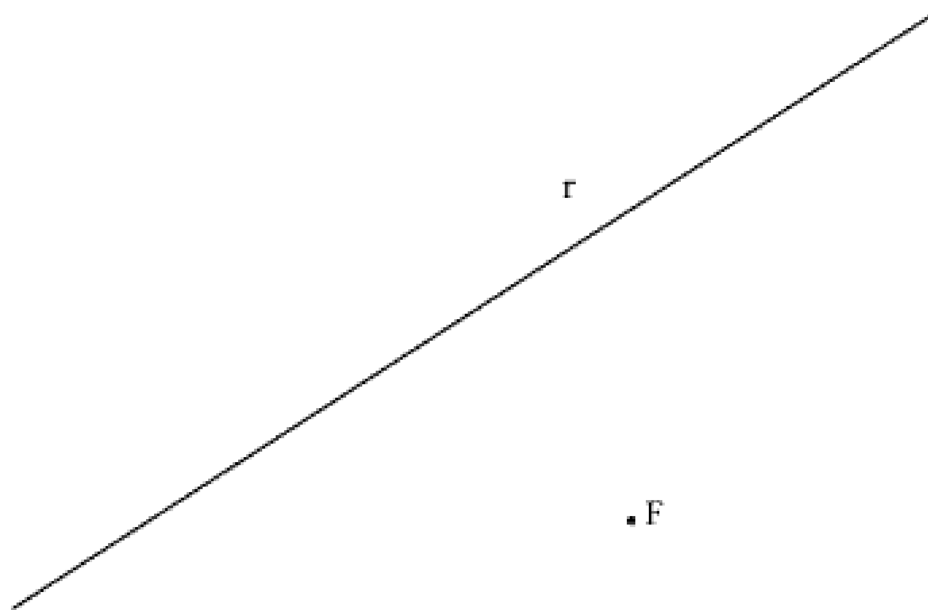
5) Mostre que $\text{f(x)} = \sqrt{x}$ é crescente em R_+.

6. *FUNÇÃO QUADRÁTICA*

6.1. *CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES*

Na figura abaixo, seja a reta r e o ponto F de um determinado plano, tal que F não pertence a r. Consideremos as seguintes questões:

- Podemos obter, nesse plano, um ponto cuja distancia a F seja igual a sua distância a r?
- Existem outros pontos com essa propriedade?
- Como determinar todos esses pontos?

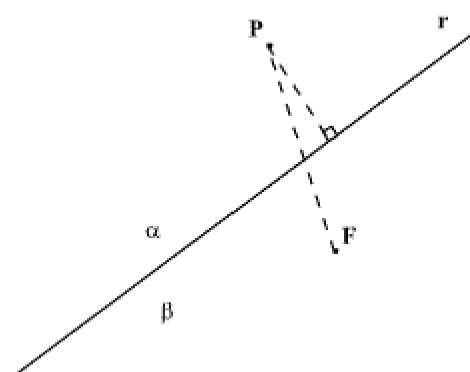


É fácil ver que a resposta às duas primeiras perguntas é afirmativa.

O conjunto de todos esses pontos é uma curva que chamamos de *parábola*.

Para responder à terceira pergunta veremos uma construção com régua e compasso de uma parábola:

Usaremos a notação $d(P,F)$ e $d(P,r)$ para indicar as distâncias de um ponto P a um ponto F e de um ponto P a uma reta r, respectivamente.



Consideramos os semi-planos α e β determinados por r, tal que $F \in \beta$ (Ver figura ao lado).

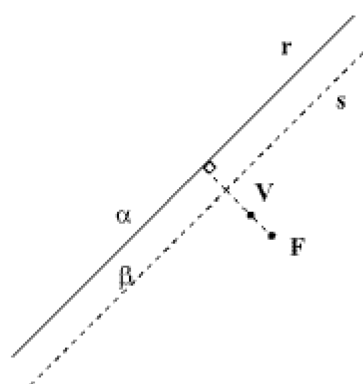
Se P é um ponto que pertence a α, então

$$d(P,F) > d(P,r),$$

o que nos garante que a parábola está contida no semi-plano β.

Seja $D = d(F,r)$. Traçando-se um segmento perpendicular à reta r, pelo ponto F, o ponto médio V deste segmento satisfaz

$$d(V,F) = d(V,r) = D/2.$$



Este ponto V pertence, portanto, à parábola. Vejamos os demais.

Consideremos uma reta s, paralela a r, contida no semi-plano β.

Se $d(r,s) < D/2$, é fácil observar que para todo $\forall P \in$ s, $d(P,F) > d(P,r)$.

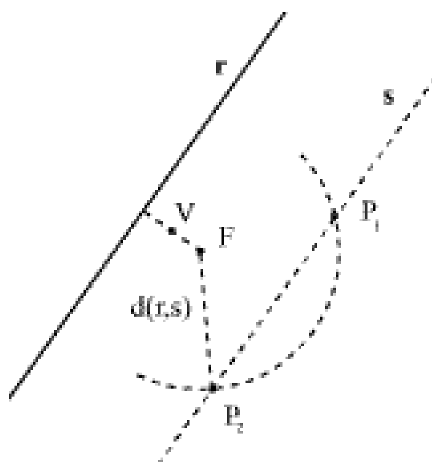
Se $d(r,s) > D/2$, s contém exatamente dois pontos, P_1 e P_2, da parábola que podem ser obtidos da seguinte forma. Centralizamos em F um compasso com abertura igual à distancia de r a s. Marcamos assim dois pontos P_1 e P_2 em s tais que

$$d(P_1,F) = d(P_1,r)$$

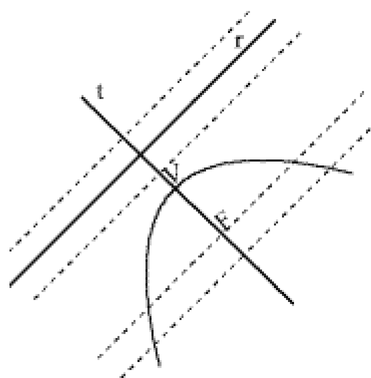
e

$$d(P_2,F) = d(P_2,r)$$

(Ver figura ao lado)



Os pontos P_1 e P_2 são simétricos em relação à reta t (perpendicular a r passando por F). Quanto mais s se afasta de V, mais os pontos obtidos se afastam de r e de t.



São elementos da parábola:

O foco da parábola: ponto fixo F.

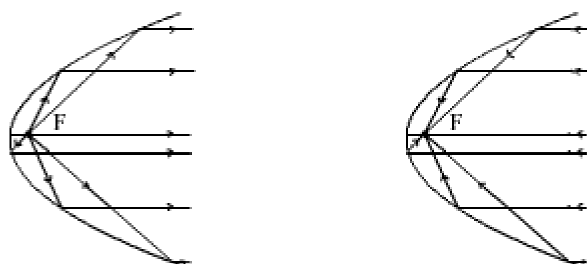
A diretriz da parábola: a reta fixa r.

O eixo de simetria da parábola: reta t, perpendicular a r, passando por F.

O vértice da parábola: ponto V, interseção de t com a parábola.

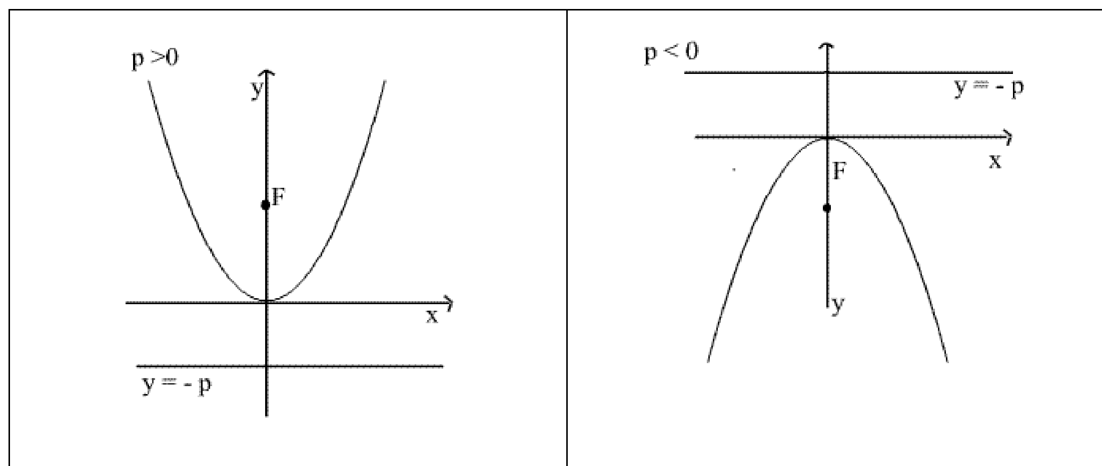
Propriedade notável da parábola

Se tivermos um refletor parabólico com uma fonte de luz localizada no seu foco, os raios que saem dessa fonte e que incidem sobre a superfície do refletor são refletidos segundo retas paralelas ao eixo de simetria (ver figura abaixo). Esse é o princípio do refletor parabólico usado nos faróis de automóveis e holofotes. Essa propriedade também é empregada na antena parabólica e no telescópio refletor, onde os raios de luz, considerados paralelos, de estrelas distantes se concentram no foco.

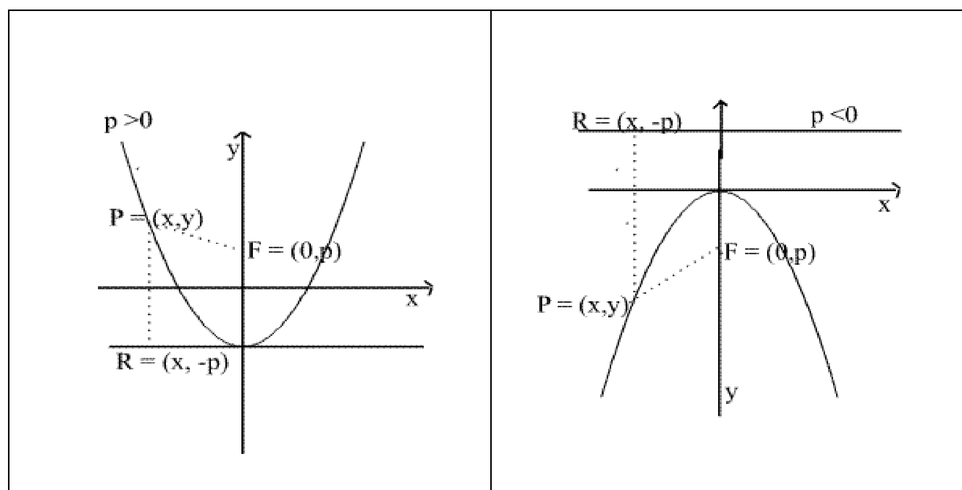


Voltando ao estudo das funções, podemos observar que em um sistema de coordenadas xOy, uma determinada parábola é o gráfico de alguma função, se, e somente se, seu eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy.

Vamos determinar a equação de uma parábola cujo eixo de simetria é o eixo Oy e possui vértice na origem. Tomemos o foco $F = (0, p)$, com $p \neq 0$. Consequentemente, a diretriz tem equação $y = -p$ (ver figura a seguir).



Sejam $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola e R um ponto sobre a diretriz r, de modo que $d(P, F) = d(P, R)$ (ver figura a seguir).



Usando a expressão analítica da distância entre dois pontos, temos

$$d(P,F) = d(P,R) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2py = 2py \Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

Ou seja, $y = \dfrac{1}{4p}x^2$.

Fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$, temos $y = ax^2$.

Reciprocamente, se um ponto $P=(x,y)$ é tal que $y=ax^2$, com $a\neq 0$, vemos que este ponto está sobre uma parábola de vértice na origem e eixo coincidente com Oy, pois como mostram as equivalências acima, fazendo $a=\frac{1}{4p}$,

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \Rightarrow d(P,F)=d(P,R) \text{ onde } F=(0,p) \text{ e } R=(x,-p) \Rightarrow d(P,F)=d(P,r).$$

Concluímos portanto que $P=(x,y)$ pertence a uma parábola com vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo Oy se, e somente se,

$$\boxed{y=ax^2}$$

onde $a=\frac{1}{4p}$ e o foco $F=(0,p)$.

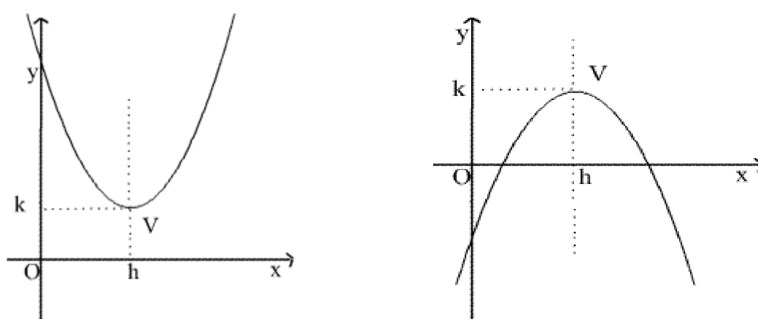
Se $a>0$ (ou seja, $p>0$), dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para cima*. Se $a<0$ (ou seja, $p<0$), dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para baixo.*

Exemplo

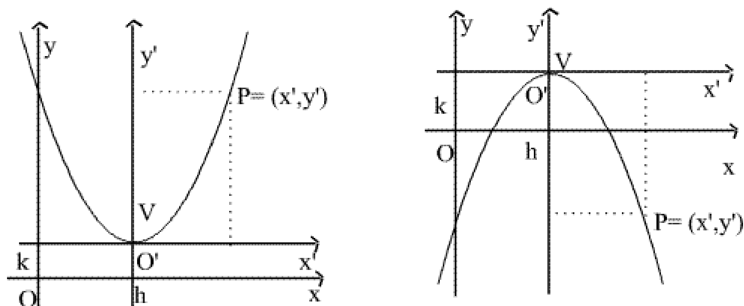
1) A parábola $y=x^2$ tem foco $F=$ (0, 1/4) e diretriz $y=$ -1/4.

2) O foco da parábola $y=-\frac{x^2}{4}$ tem coordenadas (0, -1) e sua concavidade está voltada para baixo.

Vejamos agora a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo O*y* e vértice no ponto (h, k).



Consideremos um novo sistema ortogonal de coordenadas x'O'y' com origem em O' = (h,k) e eixos O'x' e O'y' paralelos a Ox e Oy respectivamente.



Neste sistema, $P = (x', y')$ pertence à parábola se, e somente se,

$$y' = ax'^2 \qquad \text{(I)}$$

Sendo $P = (x, y)$ em xOy, temos $x = x' + h$ e $y = y' + k$, logo,

$$x' = x - h \ \text{ e } \ y' = y - k \qquad \text{(II)}$$

De acordo com (I) e (II),

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{(III)}$$

Daí,

$$y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

Fazendo $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$, temos finalmente

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \qquad \text{(IV)}$$

Observações

1) Nas figuras apresentadas, os vértices foram colocados no primeiro quadrante para melhor visualizar. Mas na dedução acima não houve particularização.

2) A definição de concavidade de parábola com eixo de simetria paralelo a Oy é a mesma: Quando $a > 0$, a concavidade é dita "para cima". Quando $a < 0$, a concavidade é dita "para baixo".

Quase sempre temos uma parábola dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$, e queremos determinar o seu vértice. Vejamos como:

A partir da equação (IV) obtemos

$$y - c = a[x^2 + (b/a)x] = a(x + b/2a)^2 - b^2/4a$$

ou ainda,

$$y+\frac{\Delta}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2 \qquad \text{(V)}$$

onde chamamos

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

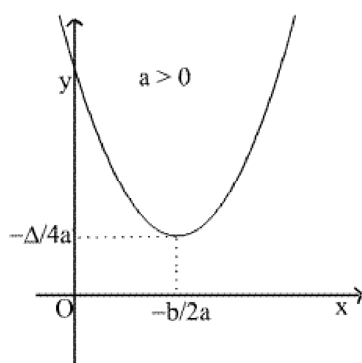
Comparando (III) e (V), podemos concluir que (IV) com $a \neq 0$, representa uma parábola com vértice (h,k), onde

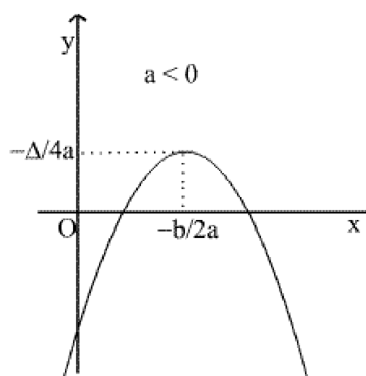
$$\boxed{h=-b/2a} \quad \text{e} \quad \boxed{k=-\Delta/4a}$$

e eixo de simetria paralelo a Oy.

Conclusão: Dada a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, então seu vértice é

$$V=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$$





6.2. *FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Sejam a, b, c $\in R$, com $a \neq 0$. A função $f: R \to R$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall\ x \in R$, é chamada *função quadrática* ou *função polinomial do segundo grau.*

Pelo exposto anteriormente, podemos afirmar que o gráfico da função quadrática é uma parábola de vértice em $(-b/2a, -\Delta/4a)$, possui eixo de simetria paralelo ao eixo Oy, com equação $x = -b/2a$, que, se $a > 0$, a concavidade do gráfico está voltada para cima e, se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

Além disso, se $a > 0$ o conjunto imagem de f é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$; e se $a < 0$ o conjunto imagem de f é $\left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

6.3. *VALOR MÁXIMO OU VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.*

Dada f uma função real, o número $Y_M \in \mathrm{Im}(f)$, é denominado *valor máximo* de f se, e somente se, $Y_M \geq f(x)$, para todo $x \in D(f)$. O número $Y_m \in \mathrm{Im}(f)$ é valor mínimo de f se, e somente se, $Y_m \leq f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

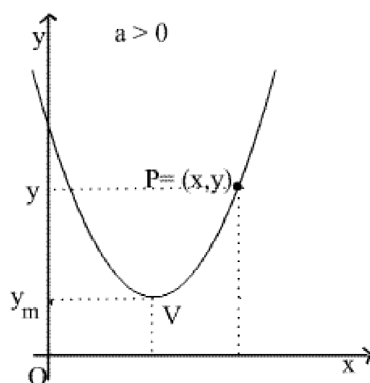
No caso da função quadrática, pela própria forma do seu gráfico, vemos que $y = -\Delta/4a$ é o seu valor mínimo, se $a > 0$, e é o seu valor máximo, se $a < 0$.

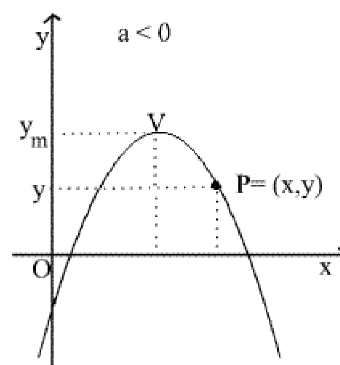
Podemos verificar este fato analiticamente:

De (V) temos,

$$f(x) + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$

Como $(x+b/2a)^2 \geq 0$, $\forall\ x \in R$, segue-se que, se $a>0$, $f(x)+\Delta/4a \geq 0$, ou seja, $f(x) \geq -\Delta/4a$. Portanto o valor mínimo de f ocorre com a igualdade $f(x) = -\Delta/4a$. Analogamente, se $a<0$, $f(x)+\Delta/4a \leq 0$, ou seja, $f(x) \leq -\Delta/4a$. Portanto o valor máximo de f ocorre quando $f(x) = -\Delta/4a$.





$\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ $\qquad$ $\text{Im}(f) = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$

6.4. *ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, um número real x para o qual $f(x) = 0$ é uma raíz real da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

De (V) temos,

$$f(x) + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$

Logo, se $f(x) = 0$ então

$$\Delta = 4a^2(x + b/2a)^2 .$$

Desta última igualdade obtemos:

Se $f(x) = 0$ para algum $x \in R$ então $\Delta \geq 0$, isto é, se $\Delta < 0$ então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in R$. A função não possui zeros se $\Delta < 0$.

Se $\Delta = 0$, a função só se anula em $x = -b/2a$.

Se $\Delta > 0$, a função possui dois zeros:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Geometricamente, o gráfico de f não intercepta o eixo Ox, se $\Delta < 0$, intercepta em um único ponto, se $\Delta = 0$ e intercepta em dois pontos se $\Delta > 0$.

Observamos que, sendo $\Delta > 0$, obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -b/a$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = c/a$$

Com isso podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2) =$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}_1\mathrm{x} - \mathrm{x}_2\mathrm{x} + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2) = \mathrm{a}\,[\mathrm{x}\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) - \mathrm{x}_2\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)] =$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_2)$$

6.5. *SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA*

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0$.

Recorrendo a (V) temos,

$$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} + a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$

Portanto,

Se $\Delta < 0$ então $-\Delta/4a > 0$, para o caso $a > 0$, e $-\Delta/4a < 0$, se $a < 0$. Logo,

$$\Delta < 0 \ \text{ e } \ a > 0 \ \Rightarrow \ f(x) > 0, \ \forall \ x \in R$$

$$\Delta < 0 \ \text{ e } \ a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < 0, \ \forall \ x \in R$$

Isto é, f tem mesmo sinal de a.

Se $\Delta = 0$, $f(x) = a(x + b/2a)^2$, portanto,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -b/2a, \text{ pois } a \neq 0.$$

Logo,

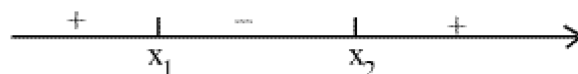
$$\Delta = 0 \text{ e } a > 0 \quad \Rightarrow f(x) > 0, \text{ se } x \neq -b/2a$$

$$\Delta = 0 \text{ e } a < 0 \quad \Rightarrow f(x) < 0, \text{ se } x \neq -b/2a$$

Isto é, f tem o sinal de *a,* exceto em $x = -b/a$

Se $\Delta > 0$, consideremos, x_1 e x_2, os zeros de f, supondo que $x_1 < x_2$. Estudemos o sinal da expressão $A = (x - x_1)(x - x_2)$:

- Se $x > x_2$ então $x > x_1$, neste caso $x - x_2 > 0$ e $x - x_1 > 0$, logo $A > 0$.
- Se $x < x_2$ e $x > x_1$ então $x - x_2 < 0$ e $x - x_1 > 0$, logo $A < 0$.
- Se $x < x_1$ então $x < x_2$, neste caso $x - x_2 < 0$ e $x - x_1 < 0$, logo $A > 0$.



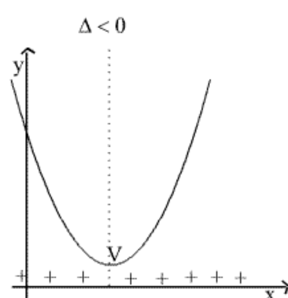
Usando que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, concluímos

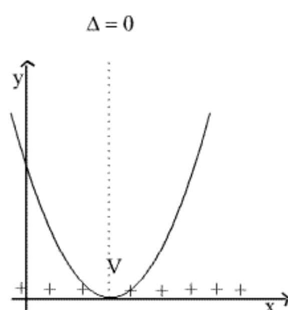
$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ & \text{e} \\ f(x) < 0 & \text{se } \quad x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

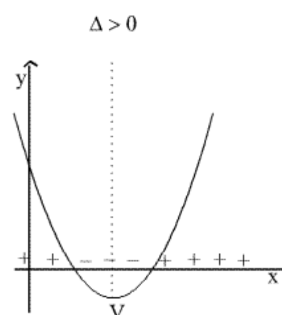
$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } \quad x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ & \text{e} \\ f(x) > 0 & \text{se } \quad x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Através do seu gráfico é muito fácil fazer o estudo de sinal de uma função quadrática, como ilustramos a seguir.

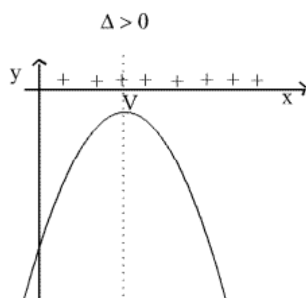
- $a > 0$:

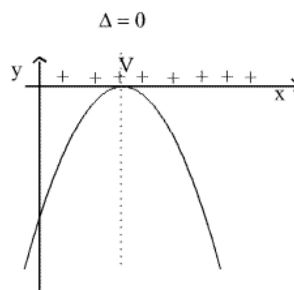


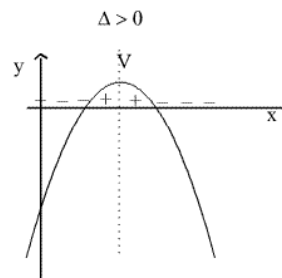




- $a < 0$:







EXERCÍCIOS

1) Mostre analiticamente que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$ é crescente em $[-b/2a, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, -b/2a]$.

2) Resolva as seguintes inequações:

a) $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$ b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ c) $-3x^2 + x - 7 \geq 0$.

3) Determine os domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x - 1}}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-3x^2 + x - 7}{2x^2 + 5x - 3}}$.

4) Suponha que os freios de um automóvel são aplicados de modo a produzir no automóvel uma força constante, contrária ao movimento. Pode-se mostrar utilizando o "Princípio da Conservação da Energia" que o deslocamento *D* do automóvel, desde o início da freagem até a sua parada completa é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade *V* com que estava o veículo quando o freio foi acionado. Assim temos:

$$D = kV^2$$

onde *k* é uma constante que depende da massa e da força aplicada. Determine k para este automóvel, sabendo que para *V* = 32 km/h, o valor do deslocamento, *D,* é igual a 8 km. Construa o gráfico de *D* em função de *V,* para $V \geq 0$. Qual o valor de D quando *V* = 80 km/h?

5) Um projétil lançado da origem O = (0,0) segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica representada por $y = ax^2 + bx$. Sabendo que o projétil atinge sua altura máxima no ponto (2,4), escreva a equação dessa parábola.

6) Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de *t* segundos, atinge a altura *h* (em metros) dada por $\mathrm{h} = 40\mathrm{t} - 5\mathrm{t}^2$.

a) Calcule a posição da pedra no instante $t = 2$ seg .

b) Calcule o instante em que a pedra passa pela posição 75 m, durante a subida.

c) Determine a altura máxima que a pedra atinge.

d) Construa o gráfico de *h* em função de *t*, observando o domínio de *h* neste problema.

7) Quais as dimensões do retângulo de maior área que se pode construir com um fio de comprimento p?

8) Dentre os números positivos que somados dão 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados seja mínima.

9) Para que um remédio produza o efeito desejado, sua concentração na corrente sanguínea deve estar acima de um certo valor, o nível terapêutico mínimo. Suponhamos que a concentração de um remédio *t* horas após ser ingerido seja dada por $C = \dfrac{21t}{(t^2 + 6)}$ mg/l. Se o nível terapêutico mínimo é 3 mg/l, determine quando este nível é excedido.

10) O preço do custo do pão de farinha integral é de R$ 0,50 cada. Um padeiro calcula que, se vender cada pão por *x* reais, os consumidores comprarão $100(3 - x)$ pães por dia. Qual é o preço de venda do pão que maximiza o lucro do padeiro?

7. *FUNÇÃO MODULAR*

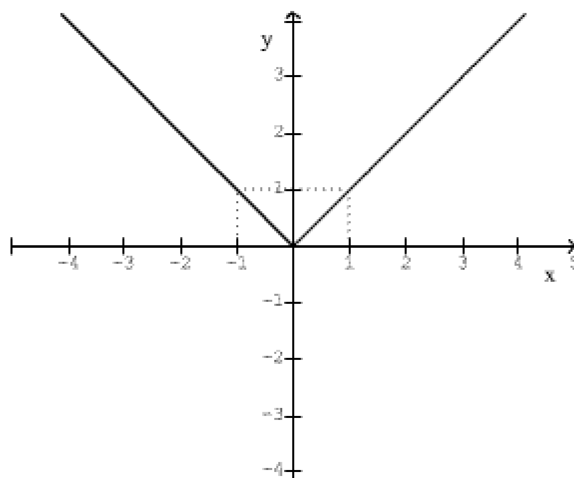
A função modular, ou função módulo, é a função definida como segue:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto |x|$$

Da definição de módulo de x, temos que a função modular pode ser definida por duas sentenças

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D(f) = R$ e a sua imagem é $\text{Im}(f) = R_+$. O seu gráfico é dado por



Vamos considerar agora funções definidas por sentenças do tipo

1. $g(x) = |\, f(x)\, |$
2. $g(x) = f(\, |x|\,)$

Exemplos

Vamos construir os gráficos das seguintes funções.

1) g: $R \;\rightarrow\; R$

$x \;\mapsto\; \left|x^2 - 4x + 3\right|$

Consideremos $g(x) = |f(x)|$, onde $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

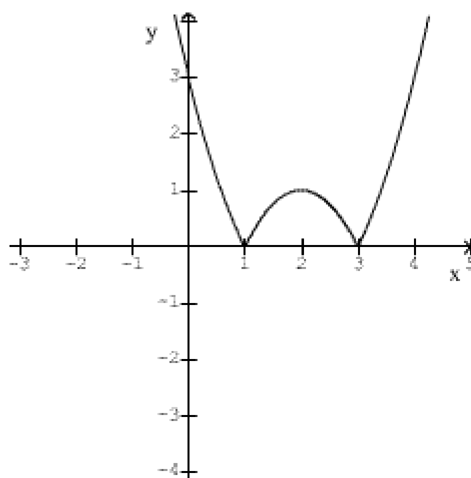
A função $g(x)$ pode ser reescrita como

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3), & \text{se } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

Analisando o sinal de $f(x)$ temos que

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{se } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

cujo o gráfico é dado a seguir



2) g: $R \;\rightarrow\; R$

$x \;\mapsto\; |x|^2 - 4|x| + 3$

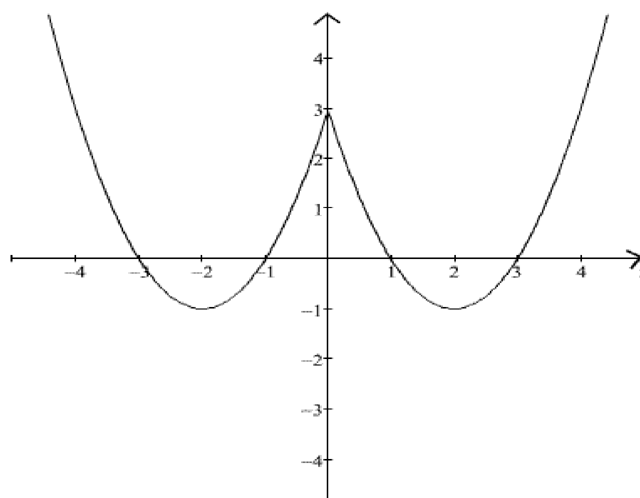
Consideremos $g(x) = f(|x|)$, onde $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x)$ pode ser reescrita como:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ (-x)^2 - 4(-x) + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

cujo gráfico é dado a seguir



Observações

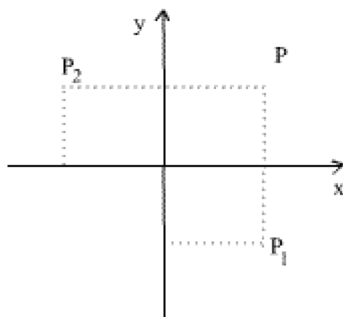
1) No exemplo 1) o gráfico da função g pode ser obtido do gráfico de f bastando para isto efetuar uma reflexão em torno do eixo Ox, no intervalo em que $f(x) < 0$.

2) No exemplo 2) o gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico de f, bastando para isto que o gráfico de f, para $x \geq 0$, sofra uma reflexão em torno do eixo Oy.

As observações feitas para os exemplos 1) e 2) podem ser generalizadas.

Dado um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano temos que:

- o simétrico de P em relação ao eixo Ox é o ponto $P_1 = (x, -y)$
- o simétrico de P em relação ao eixo Oy é o ponto $P_2 = (-x, y)$.



Temos assim que:

Dada a função $y = f(x)$, o gráfico de $y = f(-x)$ é o simétrico do gráfico de $y = f(x)$ em relação a O*y*.

Dada a função $y = f(x)$, o gráfico de $y = -f(x)$ é o simétrico do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo O*x*.

Considerando a função $g(x) = f(|x|)$, temos que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Podemos então construir o gráfico de g, construindo o gráfico de f para $x \geq 0$ e, para $x < 0$, tomando o seu simétrico em relação a O*y*.

Observemos que não faz sentido definir a função $g(x) = f(|x|)$, se a função f estiver definida apenas para $x < 0$.

Consideremos agora a função $g(x) = |f(\mathrm{x})|$. Temos que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

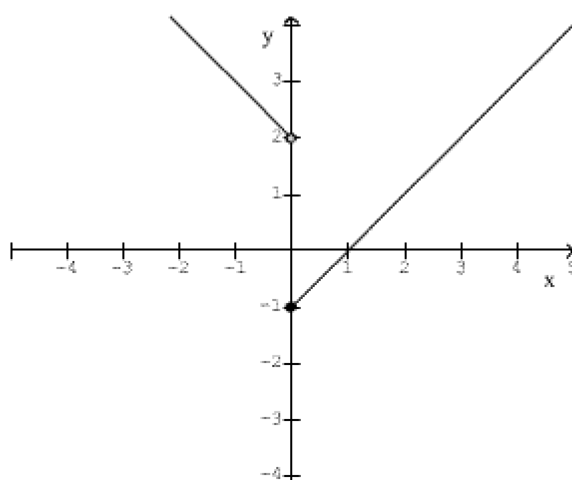
Podemos então construir o gráfico de g, construindo o gráfico de f para $f(x) \geq 0$ e, nas regiões em que $f(x) < 0$, tomando o seu simétrico em relação a O*x*.

Vejamos a construção dos gráficos de algumas funções utilizando as considerações anteriores.

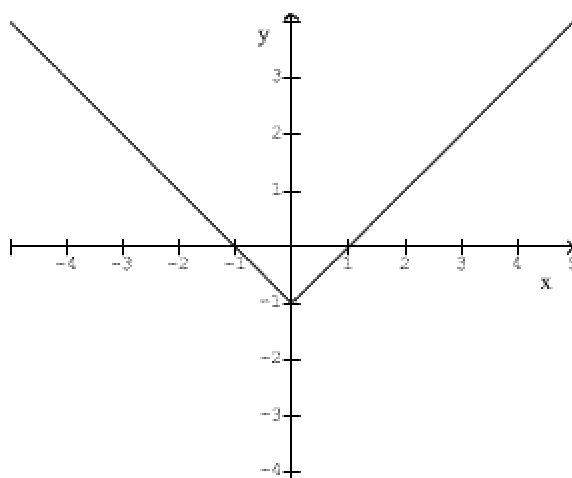
Exemplos

1) a) $f(|x|)$; b) $|f(x)|$; c) $|f(|x|)|$ para $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se } x\geq 0 \\ -x+2 & \text{se } x<0 \end{cases}$.

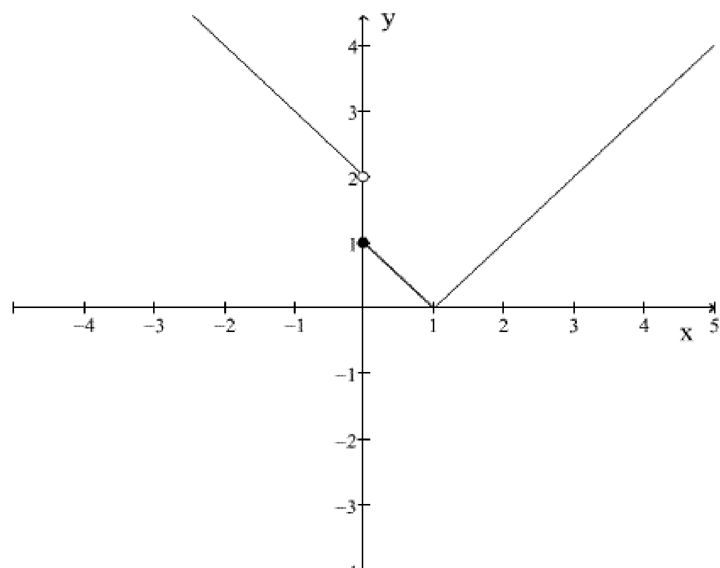
O gráfico de $f(x)$:



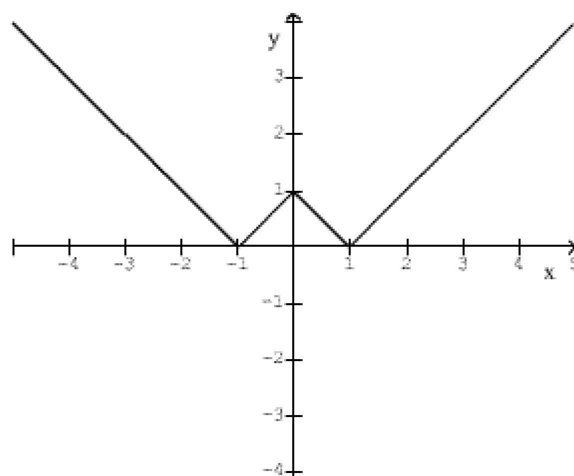
a) $f(|x|)$



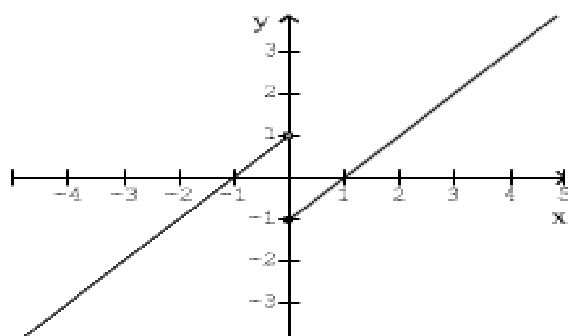
b) $|f(x)|$



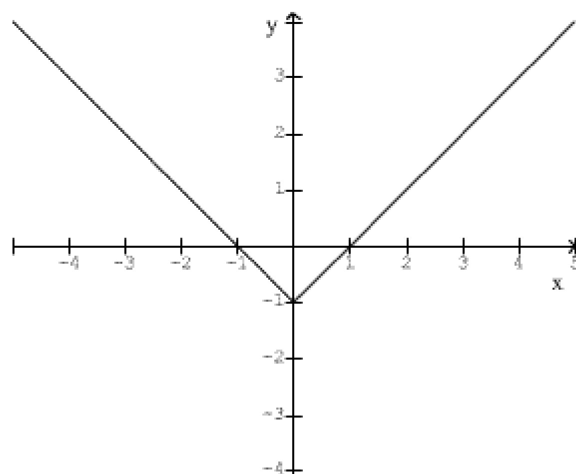
c) $|f(|x|)|$



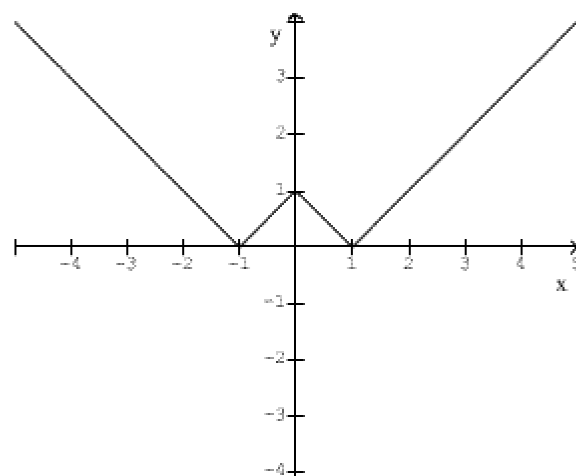
2) As mesmas construções para $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 0 \\ x+1 & \text{se } x<0 \end{cases}$ cujo o gráfico é dado a seguir



a) $f(|x|)$



b) $|f(x)|$



c) $|f(|x|)|$

Neste caso, o gráfico é o mesmo do item b), uma vez que o gráfico de $|f(x)|$ é simétrico em relação ao eixo O*y*.

8. OUTRAS FUNÇÕES

8.1 FUNÇÃO RAIZ QUADRADA

A função raiz quadrada é definida como

$$\begin{array}{rcl} f: R_+ & \to & R \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Temos que:

1) $f(0)=0$
2) $\text{Im}(f) = R_+$; este fato decorre da definição de raiz quadrada de um número.
3) f é estritamente crescente em todo o seu domínio.

Para demonstrar o item 3) vamos tomar x_1 e x_2 em R_+, com $x_1 < x_2$, e mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

De fato,

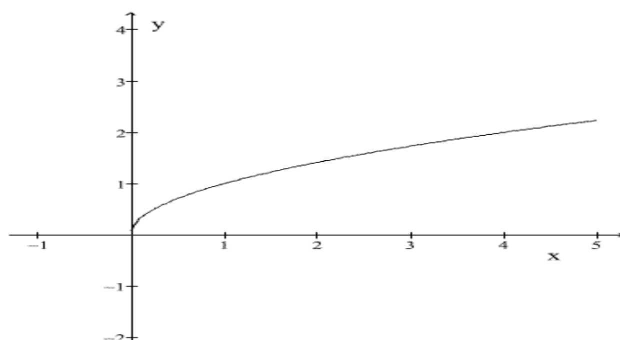
Sejam $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 = \sqrt{x_1} \Rightarrow y_1^2 = x_1 \text{ e } y_2 = \sqrt{x_2} \Rightarrow y_2^2 = x_2.$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1^2 < y_2^2 \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 < 0 \Rightarrow (y_1 - y_2).(y_1 + y_2) < 0.$$

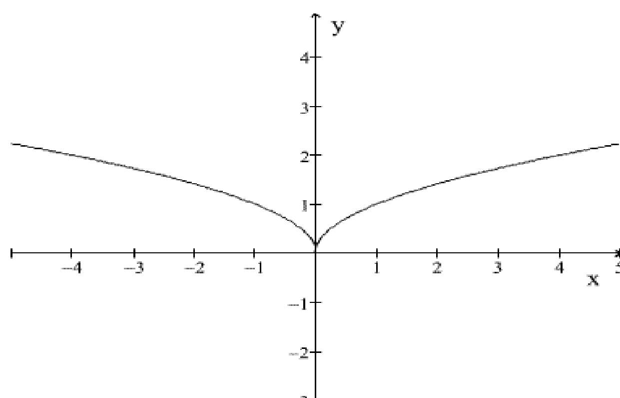
Como $\mathrm{y}_1 \geq 0$, $\mathrm{y}_2 \geq 0$ segue da expressão acima que $y_1 - y_2 < 0$, ou seja $y_1 < y_2$.

Seu gráfico é dado a seguir.



Exemplo

Dada a função $f(x) = \sqrt{|x|}$, de acordo com as considerações de função modular temos como gráfico



8.2 *FUNÇÃO CÚBICA*.

A função cúbica é definida como segue

$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow R \\ x &\rightarrow x^3 \end{aligned}$$

Vejamos que informações podemos obter da função para a construção do seu gráfico.

1) $f(0) = 0$

2) f é estritamente crescente em R.

Para demonstrar 2) vamos tomar x_1 e x_2 em R, com $x_1 < x_2$, e mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.
De fato,

Para $x_2 = 0$, temos que $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 < 0$, pois $x_1 < 0$. Daí, $f(x_1) < f(x_2)$.

Para $x_2 \neq 0$ fixo,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

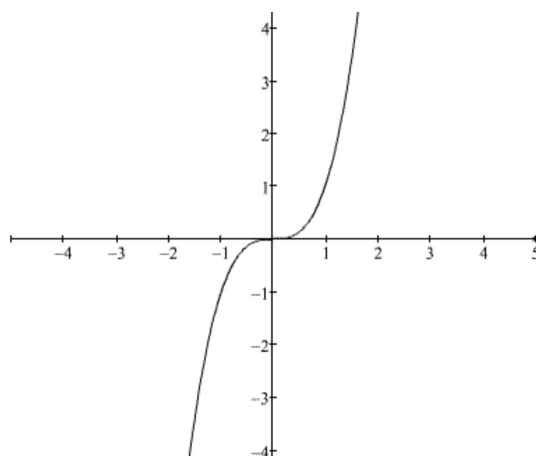
A expressão de 2^0 grau $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ em x_1, é sempre positiva, pois tem discriminante $\Delta = x_2^2 - 4x_2^2 = -3x_2^2 < 0$ e coeficiente de x_1^2 positivo. Desse modo, como $x_1 - x_2 < 0$, podemos concluir que

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0.$$

ou seja,

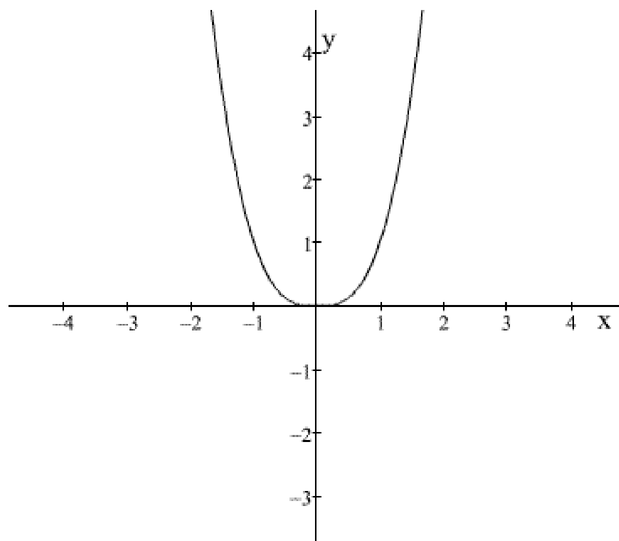
$$f(x_1) < f(x_2).$$

O gráfico da função cúbica deve ser apresentado com as informações destacadas inicialmente, além da obtenção de alguns pontos que pertencem ao mesmo. Não é possível justificar, neste contexto, porque a curva possui concavidade voltada para baixo, se $x < 0$ e para cima, se $x > 0$.



Exemplo

O gráfico da função $f(x)=|x^3|$ é dado a seguir



Observamos que o gráfico de $f(x)=|x^3|$ tem o mesmo aspecto do gráfico de $f(x)=x^2$, mas não é uma parábola. Podemos dizer que de uma maneira geral as duas funções têm o mesmo comportamento: crescimento, concavidade, sinal, etc.

8.3 *FUNÇÃO RECÍPROCA*

A função recíproca é definida como segue:

$$\begin{aligned} f:\ & R^* \to R \\ & x \to 1/x \end{aligned}$$

Vejamos que informações podemos obter da função para construção do seu gráfico.

1) O gráfico de $f(x)$ não intercepta o eixo Oy (pois $x \neq 0$) e não intercepta o eixo Ox (pois $(1/x)=0$ não tem solução).

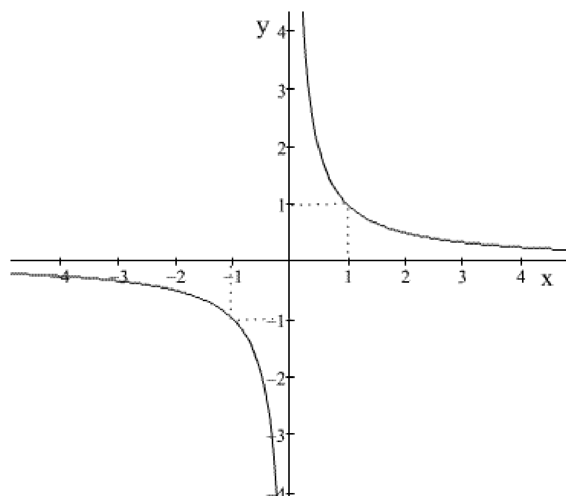
2) f é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$ e também em $(-\infty,0)$.

3) Im(f) = R^*.

4) $f(x) > 0$, se $x > 0$ e $f(x) < 0$, se $x < 0$.

5) A medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos do zero e positivos, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez maiores e podem ser tão grandes quanto se queira. A medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos de zero e negativos, os valores de $f(x)$ se tornam-se cada vez menores e podem ser tão pequenos quanto se queira.

A partir das considerações acima, podemos obter o gráfico da função. A curva é chamada hipérbole equilátera.



Vale a pena ressaltar que:

1) A observação 5) Pode ser formalizada assim:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

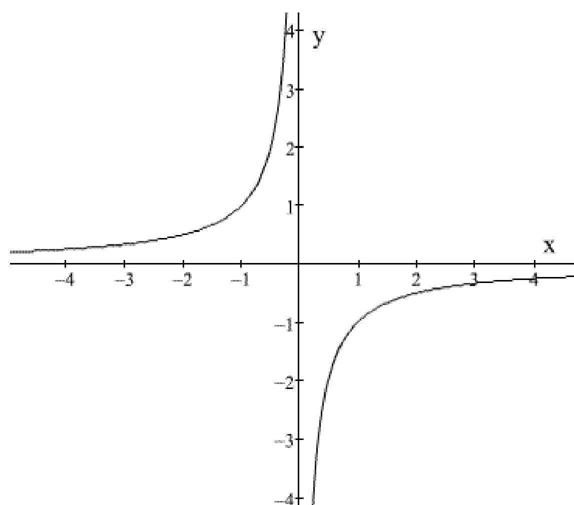
Podemos também dizer que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

2) As retas $y = 0$ e $x = 0$ são chamadas assíntotas horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico de f.

Exemplo

O gráfico da função $f(x) = -1/x$ é dado a seguir



9. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS - TRANSLAÇÃO DE EIXOS

9.1. *INTRODUÇÃO*

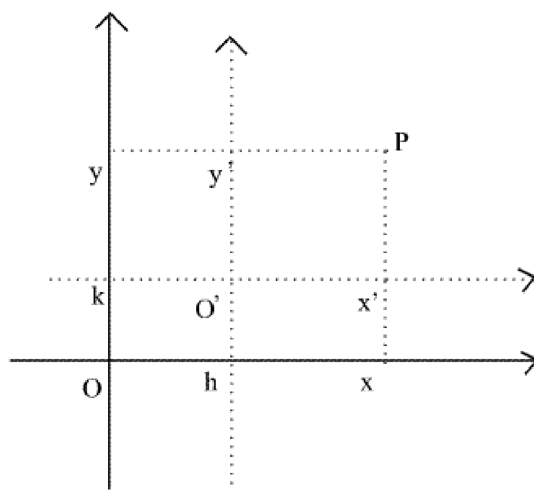
A partir do esboço do gráfico de uma função temos informações gerais sobre o comportamento da mesma: intervalos de crescimento e decrescimento, conjunto imagem, valores máximos ou mínimos, zeros etc.. Não precisamos saber, ponto a ponto, por onde a curva passa para obter tais informações, ou seja, não devemos ficar presos ao uso de tabelas na construção de um gráfico. Estas devem entrar como um dos recursos. Com efeito, conhecer valores do gráfico de uma função em geral não permite a sua construção correta (a menos que n seja "muito grande" ou que a função seja bem comportada como, por exemplo a função afim) se não sabemos preliminarmente o aspecto da curva. Por exemplo, já conhecemos a forma da parábola; logo, dada a função quadrática, para construirmos o seu gráfico basta conhecermos o seu vértice, suas raízes, interseção com eixo Oy e concavidade.

9.2. *TRANSLAÇÃO DE EIXOS*

Conhecendo-se a curva dada pela equação $y = f(x)$, um bom recurso para construção do gráfico de curvas do tipo $y - k = f(x - h)$ é a translação de eixos.

Em geral, se no plano em que os eixos Ox e Oy são dados, quando tomamos novos eixos paralelos aos anteriores, dizemos que ocorreu uma *translação de eixos*.

Consideremos que os eixos dados Ox e Oy foram transladados aos eixos O'x' e O'y' com nova origem O' = (h,k) em relação aos eixos dados.



Seja P um ponto de coordenadas (x, y) em relação aos eixos originais e (x', y') em relação aos novos eixos. Vamos relacionar (x,y) com (x', y').

Temos que:

$$\overline{O}\overline{A} = x = x' + h$$
$$\overline{O}\overline{B} = y = y' + k$$

Então, temos *as equações de translação de eixos*

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Se a equação de uma curva é dada em x e y então a equação em x' e y' é obtida substituindo-se x por $x' + h$ e y por $y'.+ k$.

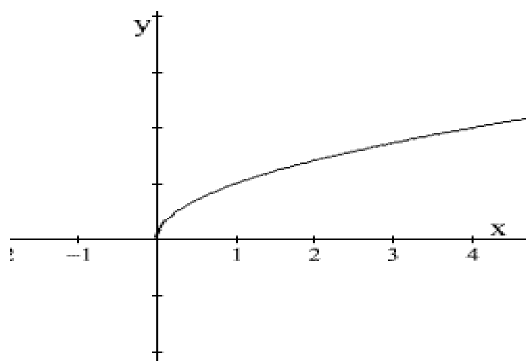
O gráfico da equação em x e y em relação aos eixos Ox e Oy é exatamente o mesmo conjunto de pontos que o gráfico da equação correspondente em x' e y' , em relação aos eixos O'x' e O'y'.

A forma de uma curva não é afetada pela posição dos eixos coordenados, no entanto sua equação é modificada.

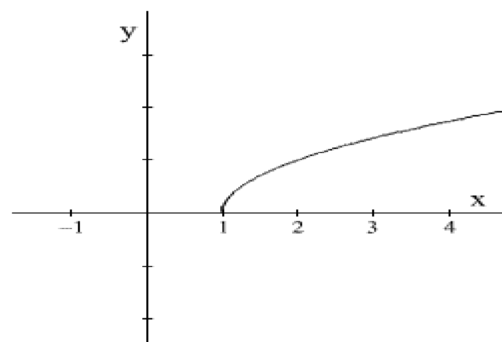
Exemplo

Consideremos as curvas $y = \sqrt{x}$ *e* $y = \sqrt{x - 1}$ e observemos os seus respectivos gráficos.

(I)



(II)



As curvas têm equações diferentes, no entanto a “forma” é a mesma em (I) e (II). Podemos dizer que:

O gráfico (II) pode ser obtido de (I) deslocando-se a curva (I) uma unidade para direita

ou

O gráfico (II) pode ser obtido de (I) transladando-se o eixo Oy em (I) de uma unidade para esquerda.

Se podemos tomar os eixos coordenados como desejamos, eles podem ser escolhidos de tal maneira que as equações sejam tão simples quanto possível.

Exemplos

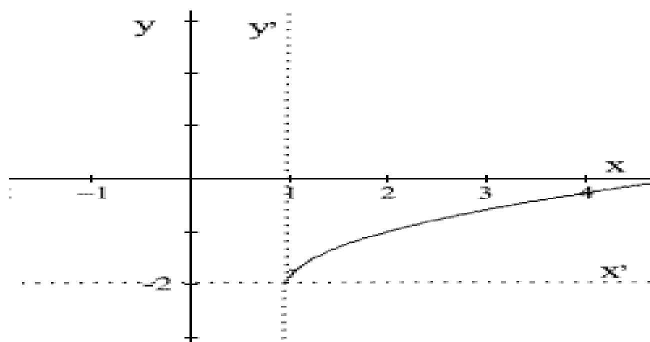
1) Dada a equação da curva $y + 2 - \sqrt{x-1} = 0$, vamos encontrar a equação da curva em relação ao sistema O’x’ e O’y’, após uma translação dos eixos a nova origem O’ = (1,-2).

Solução: $x = x' + h = x' + 1$

$y = y' + k = y' - 2$

Substituindo na equação dada obtemos

$$y' - 2 + 2 - \sqrt{x' + 1 - 1} = 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{x'}$$



2) Vamos obter as equações a seguir em relação aos novos eixos O'x' e O'y' cuja origem O' é dada e construir os respectivos gráficos.

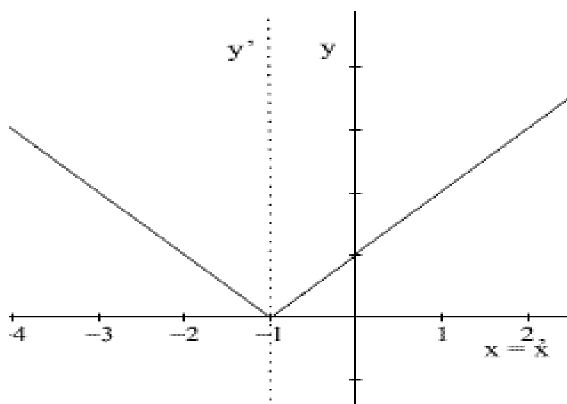
a) $y = |x + 1|$ O'= (-1, 0)

$x = x' + h = x' - 1$

$y = y' + k = y' + 0$

Substituindo na equação, temos

$$y = |x + 1| \Leftrightarrow y' + 0 = |x' - 1 + 1| \Leftrightarrow y' = |x'|$$

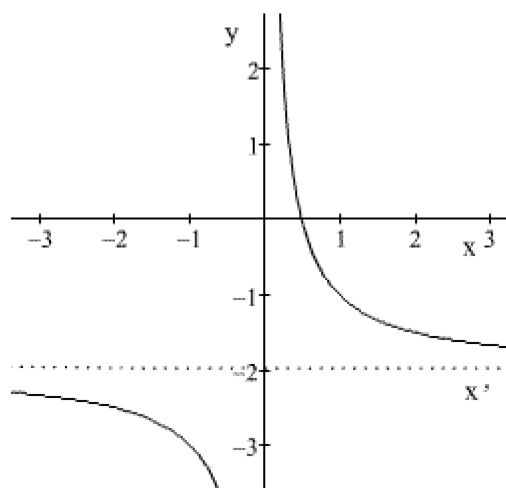


b) $y + 2 = \dfrac{1}{x}$ O' = (0. -2)

Solução: $x = x'$

$y = y' - 2$

Substituindo na equação, temos $y' = \dfrac{1}{x'}$



De modo geral, conhecendo-se o gráfico de uma função $y = f(x)$, para construirmos o gráfico de $y = f(x - h) + k$ basta efetuarmos uma translação de eixos considerando

$\begin{cases} x - h = x' \\ y - k = y' \end{cases}$ e construir o gráfico de $y' = f(x')$ em relação aos novos eixos auxiliares O'x' e O'y'.

Exemplos

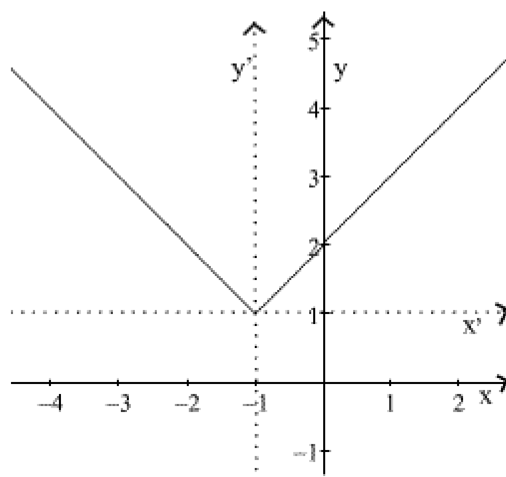
Vamos construir o gráfico das seguintes funções:

1) $f(x) = |x + 1| + 1$

Solução:

$y - 1 = |x + 1|$; considerando $y - 1 = y'$ e $x + 1 = x'$, temos $y' = |x'|$ e

O' = (-1, 1).

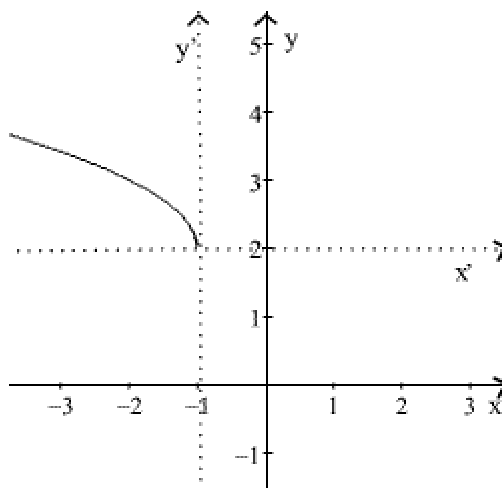


2) $f(x) = \sqrt{-x - 1} + 2$

Solução: $y - 2 = \sqrt{-x-1}$

Observemos que não devemos fazer $-x - 1 = x'$, se vamos usar translação de eixos. No entanto, podemos escrever a função como $y - 2 = \sqrt{-(x+1)}$ e considerar $\begin{cases} x+1 = x' \\ y-2 = y' \end{cases}$.

Assim. $y' = \sqrt{-x'}$ e O' = (-1,2)



EXERCÍCIOS

1) Construa o gráfico das seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, imagem intervalos de crescimento e decrescimento.

a) $f(x) = (x+1)^3 - 1$

b) $f(x) = |(x+1)^3 - 1|$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - 1$

d) $f(x) = x + x\sqrt{(x-1)^2}$

e) $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } x \ne 1 \\ x-1, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

f) $g(|x|)$

g) $g(x-2)$

h) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$

2) Considere a função definida pela sentença: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1| - |x-1|}{x}, & \text{se } x \ne 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x)$ b) $-2f(x)$ c) $f(|x|)$ d) $-2 + f(x+1)$.

10. A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES

Neste capítulo veremos as operações de soma, produto e quociente de funções reais. É freqüente na Matemática o uso dessas operações.

Definições

Dados conjuntos quaisquer A e B tais que $I = A \cap B \neq \emptyset$ e funções $f: A \to R$ *e* $g: B \to R$ temos

1. A soma de f e g é a função $f + g: I \to R$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. O produto de f e g é a função $f \cdot g: I \to R$ tal que $(f \cdot g)(x) = f(x).g(x)$.

3. O quociente de f por g é a função $f/g: J \to$ R, onde $J = \{ x; x \in I$ e $g(x) \neq 0 \}$ dada por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Exemplos

1) Vale destacar os seguintes casos particulares:

- Se $A = B$ e f é a função constante $f(x) = 1$, então o quociente de f por g é dada por $(1/g)(x) = 1/g(x)$, definida no conjunto $\{ x \in B; g(x) \neq 0 \}$. Considerando-se, por exemplo, $g(x) = x - 1$ então $(1/g)(x) = 1/(x-1)$ e possui domínio igual a R - $\{1\}$.
- Se $A = B$ e $g(x) = k$, $k \in$ R, é uma função constante então a soma e o produto de f e g são respectivamente:

$$f + k: A \to R \quad x \to x + k \qquad \text{e} \qquad k.f: A \to R \quad x \to k.x$$

Tomando-se, por exemplo, $f(x) = x^3$ então teremos $f(x) - 2 = x^3 - 2$ e $5f(x) = 5.x^3$.

2) Sejam as funções $f(x) = x - 9$ e $g(x) = \sqrt{x} - 3$. Então,

$$(2.f - g)(x) = 2.f(x) - g(x) = 2x - 18 - \sqrt{x} + 3$$

e

$$(f \cdot g)(x) = f(x).g(x) = x.\sqrt{x} - 3x - 9\sqrt{x} + 27.$$

Como o domínio de f é R e o de g é R_+, o domínio de cada uma dessas funções é $R_+ = R_+ \cap R$.

Tomando-se $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x - 9) / (\sqrt{x} - 3) = \sqrt{x} + 3$, temos que

$(f/g)(x) = \sqrt{x} + 3$ cujo domínio é $R_+ - \{9\}$.

Observe que neste exemplo f/g não é igual à função de variável real "$\sqrt{x} + 3$" cujo domínio é R_+.

Ilustremos com a seguinte aplicação:

3) Durante as férias dos meses de dezembro e janeiro, estudantes resolveram coletar e vender material usado para reciclagem de vidro e de plástico. Ao final de dezembro, após contatos com pessoas do bairro e fábricas de reciclagem, conseguiram coletar diariamente 300 quilogramas de vidro, que eram vendidos a R$0,40 o quilo, e 200 quilogramas de plástico, vendidos a R$ 0,50 o quilo.

No mês de janeiro, ampliando seus contatos, conseguiram aumentar a coleta de vidro em 10 quilos por dia. Entretanto como muitas garrafas eram coletadas, o preço de venda do quilo de vidro foi reduzido em R$0,01 por dia. Também no mês de janeiro, aumentaram a coleta de plástico em 5 quilos por dia, material cujo preço de venda foi mantido constante durante esses dois meses.

Para o mês de janeiro temos:

- Representemos a quantidade diária de vidro coletada pelos estudantes, em função do dia x do mês, pela função

$$Q_1(x) = 300 + 10.x$$

- O preço de venda do quilo do vidro, em função de x, pode ser dado por

$$P_1(x) = 0{,}40 - 0{,}01.x$$

- O Lucro diário obtido com a venda do vidro pode ser dado como produto das duas funções Q_1 e P_1. Isto é, dado pela função L_1 tal que

$$L_1(x) = Q_1(x).\,P_1(x) = (300 + 10.x).(0{,}40 - 0{,}01.x) = -0{,}1.x^2 + x + 120$$

$$\therefore \quad L_1(x) = 120 + x - 0{,}1.x^2$$

Para o plástico, de modo semelhante, temos,

- A quantidade diária coletada pelos estudantes, em função do dia x do mês, é dado por

$$Q_2(x) = 200 + 5.x$$

- O preço de venda do quilo é dado pela função constante

$$P_2(x) = 0{,}50$$

- O Lucro diário obtido com a venda do plástico é dado como produto das duas funções Q_2 e P_2. Ou seja,

$$L_2(x) = Q_2(x).\,P_2(x) = (200 + 5.x)\,.0{,}5$$
$$= 100 + 2{,}5.x$$

$$\therefore \quad L_2(x) = 100 + 2{,}5.x$$

- O Lucro diário obtido com a venda dos dois produtos é dado pela *soma* das duas funções L_1 e L_2. Ou seja,

$$L(x) = \mathrm{L}_1(x) + L_2(x) = (-0{,}1.x^2 + x + 120) + (100 + 2{,}5.x) = -0{,}1.x^2 + 3{,}5.x + 220$$

$$\therefore \quad L(x) = 220 + 3{,}5.x - 0{,}1.x^2$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Considere as funções definidas pelas sentenças a seguir:

$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Determine o domínio, a sentença e o gráfico das funções:

a) $f - g$ b) $f \cdot g$ c) f/g

2) Sejam f e g funções reais de variável real, mostre que:

a) f e g são funções crescentes (decrescentes) $\Rightarrow f + g$ é função crescente (decrescente).

b) f e g funções crescentes (ou decrescentes), em geral, não implica que $f \cdot g$ é crescente (ou decrescente). Dê contra-exemplos.

3) Considere o Exemplo 3) do texto.

I) a) Calcule em que dia(s) do mês de janeiro o lucro diário com a venda do vidro é máximo.

b) Calcule em que dia(s) do mês de janeiro o lucro diário com a comercialização dos dois produtos é máximo.

II) Supondo que no final de dezembro havia 30 estudantes envolvidos no trabalho, que do dia $1^{\underline{0}}$ até o dia 15 de janeiro este número sofreu um aumento de um estudante por dia e que em seguida manteve-se constante, determine:

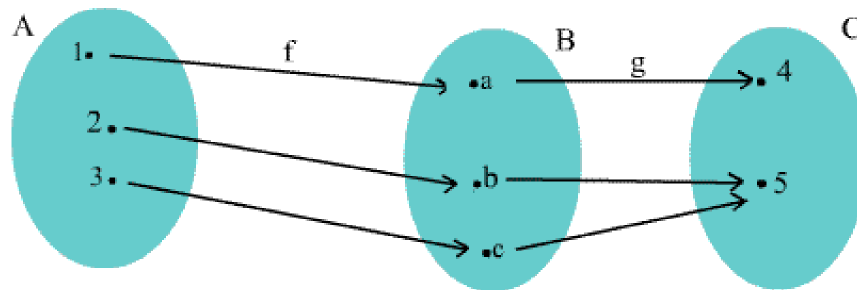
a) A função que dá o número de estudantes envolvidos no trabalho em cada dia durante o mês de janeiro.

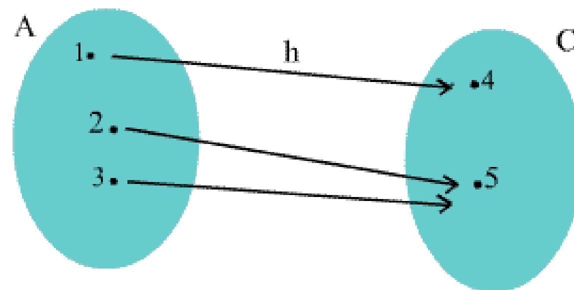
b) A função que dá o lucro diário de cada estudante com a venda do vidro, supondo que o lucro total do dia era distribuído igualmente entre aqueles trabalharam naquele dia.

c) Que operações entre funções você utilizou em b) ?

11. *COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES*

Consideremos as funções $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: A \to C$ dadas pelos diagramas





Observamos que

$$a = f(1) \quad \text{e} \quad g(a) = g(f(1)) = 4 = h(1)$$
$$b = f(2) \quad \text{e} \quad g(b) = g(f(2)) = 5 = h(2)$$
$$b = f(3) \quad \text{e} \quad g(b) = g(f(3)) = 5 = h(3)$$

e, portanto, para todo elemento x de A temos $g(f(x)) = h(x)$. Neste caso, h é chamada função composta de f com g e indicada por $h = g \circ f$.

Definição 1

> Sejam $f: A \to B$, $g: B \to C$ funções tais que o contradomínio de f é igual ao domínio de g. Então a função composta de f com g é a função $g \circ f: A \to C$, definida por
>
> $$(g \circ f)\,(\text{x}) = g(f\,(x)).$$

Exemplos

1) Consideremos as funções

$$f: R \to R \quad x \mapsto x + 1 \qquad \text{e} \qquad g: R \to R \quad x \mapsto x^2 + x + 1$$

Temos que, para todo $x \in R$,

$$g\,(f\,(x)) = g(\,x{+}1\,) = (x{+}1)^2 + (x{+}1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

Então $g \circ f: R \to R$ é definida por $g(f(x)) = x^2 + 3x + 3$.

Temos, também,

$$f(g(x)) = f(\,x^2{+}x{+}1\,) = (x^2{+}x{+}1) + 1 = x^2 + x + 2, \text{ para todo } x \in R.$$

E, então, $f \circ g: R \to R$ é definida por $f(g(x)) = x^2 + x + 2$.

Observemos que neste exemplo temos

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Podemos então concluir que a composição de funções não é, em geral, comutativa.

2) Um corpo é lançado verticalmente para cima da superfície da terra, com velocidade inicial $v_o = 20$ m/s. Desprezando-se a resistência do ar e considerando-se que próximo à superfície da terra a aceleração da gravidade é de $g = 10$ m/s^2, então, em cada instante t dado em segundos, sua altura em relação à superfície da terra é dada em metros pela função:

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_o t = -5t^2 + 20t$$

Vamos determinar a altura do corpo quando o tempo é dado em minutos. Temos a função $t(t_1) = 60.t_1$, que converte minutos em segundos. Então,

$$h_1(\mathrm{t}_1) = h(t(t_1)) = h(60.t_1) = -5.(60.t_1)^2 + 20.(60.t_1)$$

$$\therefore \quad h_1(t_1) = -18000.(t_1)^2 + 1200.t_1$$

O conceito de composta de duas funções pode ser generalizado.

Definição 2

Sejam $f: A \to B$, $g: C \to D$ funções tais que o conjunto $E = \{ x \in A;\ f(x) \in C \}$ não é o vazio. Então a função composta de f com g é a função $g \circ f: E \to D$, definida por

$$(g \circ f)\ (\mathrm{x}) = g(f(x)).$$

Exemplo

Consideremos as funções

$$\begin{array}{rcl} f: R & \to & [-4,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} g: R_+ & \to & R \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Então

$$\mathrm{D}(g \circ f) = \{ x \in R;\ f(x) \in R_+ \} = \{ x \in R;\ x^2 - 4 \geq 0 \} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

$$\text{e} \qquad g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}\ .$$

Portanto $g \circ f$: $]-\infty,-2] \cup [2,\ +\infty[\to R$ é tal que $g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$.

12. FUNÇÕES INJETORAS. FUNÇÕES SOBREJETORAS

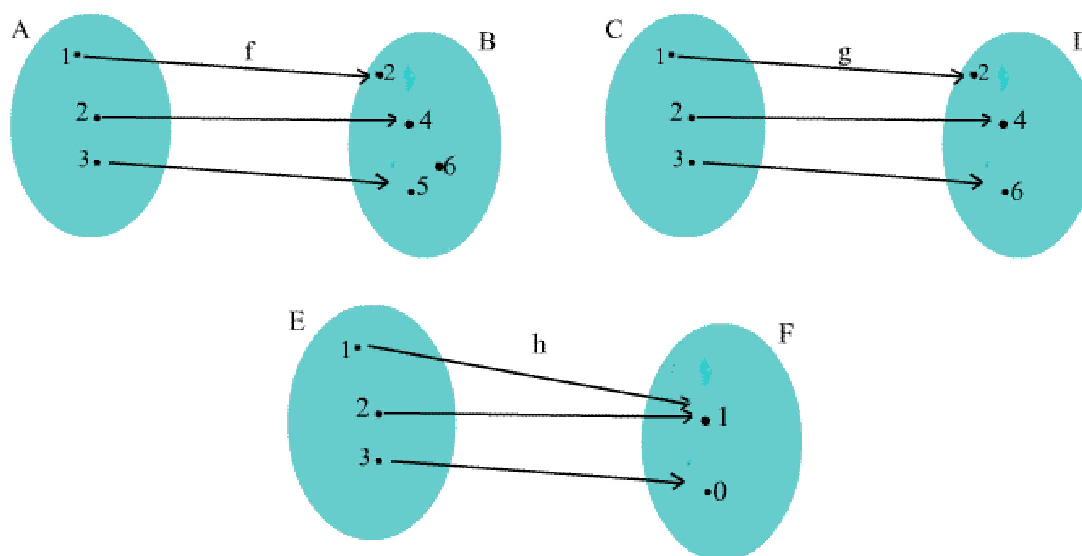
12.1 FUNÇÕES INJETORAS

Definição

Dizemos que uma função f: $A \rightarrow B$ é injetora quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x_2$, em A, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplos

1) Sejam as funções definidas pelos diagramas:



Então, apenas f e g são funções injetoras. A função h é tal que h (1) = h(2), logo não é injetora.

2) A função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, é injetora.

De fato, para todos x_1 e x_2 em R, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) = 0.$$

Como $a.(x_1 - x_2) = 0$, com $a \neq 0$, então $(x_1 - x_2) = 0$ e portanto $x_1 = x_2$.

3) A função $f : R - \{1\} \to R - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é injetora.

De fato, dados x_1 e x_2 em $R - \{1\}$, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

4) Exploraremos a seguir aspectos mais geométricos da injetividade.

Evidentemente, uma função $f: A \to B$ é injetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui no máximo uma solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, $f: A \to B$ é injetora se, e somente se, para toda reta $y = b$, $b \in$ B, a interseção do gráfico de f com essa reta ocorre em no máximo um ponto. Em vista disto temos:

- Se f e g são funções cujos gráficos são representados por,

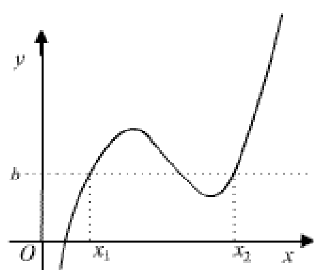


Gráfico de f

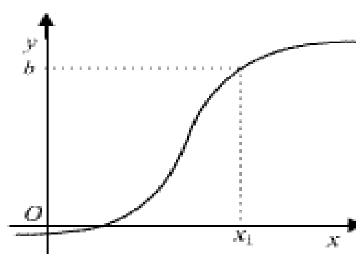
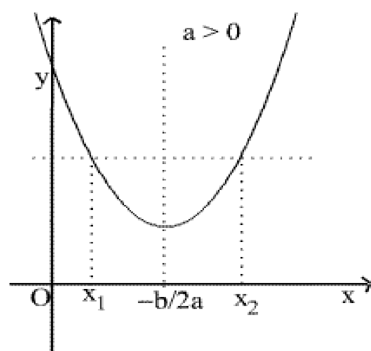
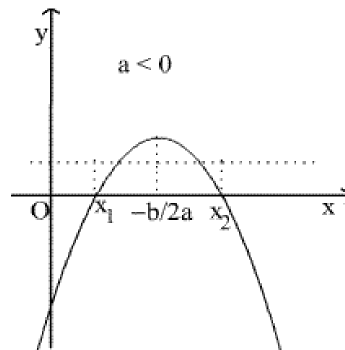


Gráfico de g

então f não é injetora e g é injetora.

- A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, (exemplos de gráficos a seguir) não é injetora.





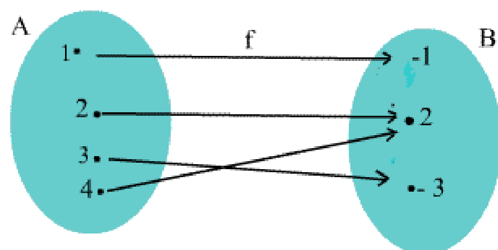
Isto se deve ao fato do seu gráfico ser simétrico em relação à reta x = -b/(2a).

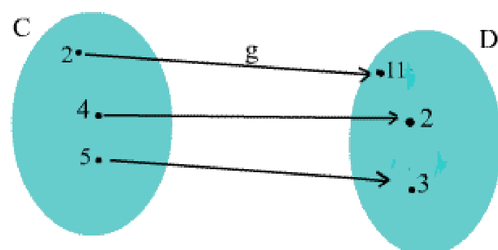
12.2 FUNÇÕES SOBREJETORAS

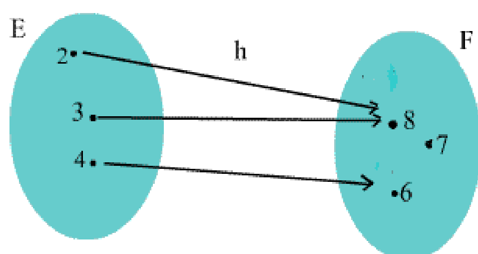
Dizemos que uma função *f*: A → B sobrejetora quando para todo *y* ∈ B, existe pelo menos um *x* ∈ A tal que *f*(*x*) = y.

Exemplos

1) Considere as funções f, g e h definidas pelos diagramas:







As funções f e g são sobrejetoras porque, em ambos os casos, o conjunto imagem é igual ao contradomínio. O mesmo não ocorre com a função h e portanto ela não é sobrejetora.

2) A função afim $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é sobrejetora.

Dado $y \in R$, exibiremos $x \in R$ tal que $f(x) = y$. Se $y \in R$ então $x = \dfrac{y-b}{a}$ é um número real tal que

$$f(x) = a.\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y.$$

3) Exploraremos a seguir aspectos mais geométricos da sobrejetividade.

Evidentemente, uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui pelo menos uma solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, a interseção entre o gráfico de f e a reta $y = b$, para todo $b \in B$ é diferente do vazio.

Usando este critério temos:

Se $f:[0,c] \to [a,b]$ e $g:[0,c] \to [a,b]$ são funções cujos gráficos são representados a seguir então f é sobrejetora e g não é sobrejetora.

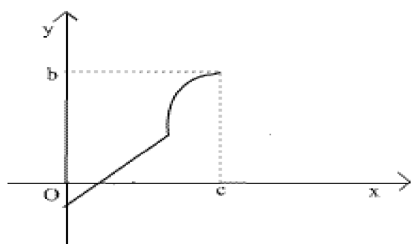


Gráfico de f

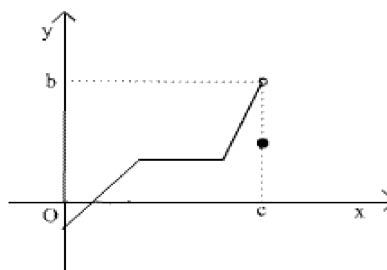
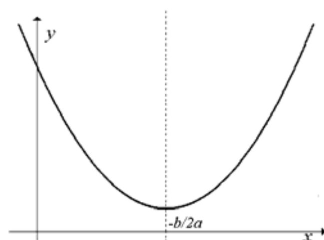


Gráfico de g

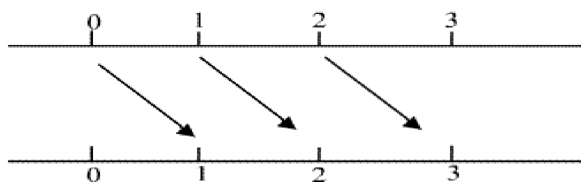
A função quadrática $f(x) = \text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c}$, $\text{a} \neq 0$, não é sobrejetora, mas a função $g: R \rightarrow \left[\dfrac{-\Delta}{4.a} \quad , +\infty\right]$, tal que $g(x) = \text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c}$, a>0, é sobrejetora.



4) A função $f: N \rightarrow N$ definida por $f(x) = x + 1$ (veja figura abaixo) não é sobrejetora. De fato,

$$f(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Como $-1 \notin N$, então não existe $x \in N$ tal que $f(x) = 0$.



5) A função $f: R-\{1\} \to R$ definida por $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ não é sobrejetora.

De fato, se y está no conjunto imagem de f, Im(f), então existe $x \in R-\{1\}$ tal que $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ e, consequentemente,

$$(y - 2).\, x = 1 + y. \qquad \text{(I)}$$

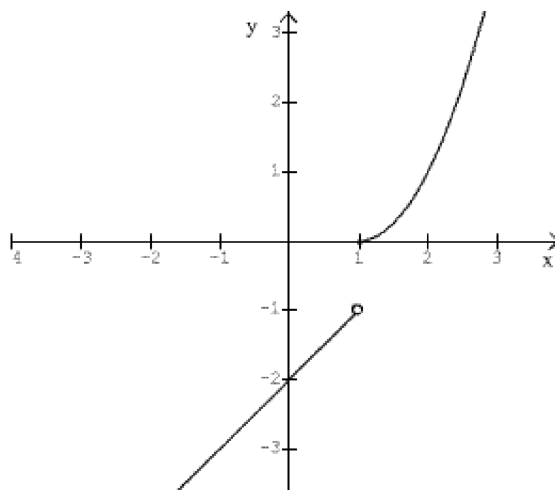
Fazendo $y = 2$ em (I) temos: 0 = 3, uma contradição. Logo, $2 \notin$ Im(f).

Observe que a função $\mathrm{f} : \mathrm{R}-\{1\} \to \mathrm{R}-\{2\}$ definida por $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ é sobrejetora.

6) Seja f: $\mathrm{R} \to \left]-\infty,-1\right[\cup \left[0,+\infty\right[$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & se\ \ x \geq 1\\ x-2 & se\ \ x<1\end{cases},$$

cujo gráfico é dado a seguir



Mostraremos, através da definição, que f é sobrejetora.

Dado $y \in$ CD(f), vamos distinguir dois casos:

1º caso. $y \in [0, +\infty)$.

Tomando $x = \sqrt{y}+1$ temos que x ≥ 1 e então,

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-1)^2=\left(\sqrt{\mathrm{y}}\ \ +1\ \ -1\right)^2=y.$$

$2^{\underline{o}}$ caso. $y \in (-\infty, -1)$. Tomando $x = y + 2$ temos que $x < 1$ e então,

$$f(x) = x - 2 = (y - 2) + 2 = y.$$

Portanto f é sobrejetora.

Proposição

Se f: A $\rightarrow$ B e g: B $\rightarrow$ C são funções sobrejetoras, então $g \, \boldsymbol{o} \, f$ é sobrejetora.

D] Seja $z \in$ C, um elemento qualquer. Como g é sobrejetora, existe $y \in$ B tal que $g(y) = z$. Sendo f também sobrejetora e $y \in$ B, existe $x \in$ A tal que $f(x) = y$. Logo, $(g \, \boldsymbol{o} \, f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

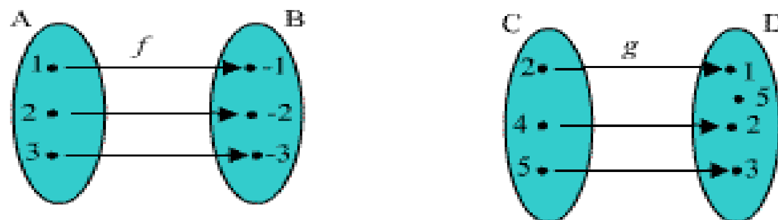
12. 3 FUNÇÕES BIJETORAS

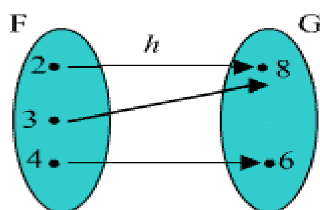
Definição

Uma função f: A $\rightarrow$ B chama-se bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Exemplos

1) Sejam as funções f, g e h definidas pelos diagramas:





A função f é bijetora porque é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. A função g não é bijetora porque não é sobrejetora. A função h não é bijetora porque não é injetora.

2) A função identidade id: A $\rightarrow$ A definida por $id(x) = x$, para todo $x \in$ A, é a mais simples das funções bijetoras.

3) A função afim $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é bijetora porque, como já foi visto, é injetora e sobrejetora.

4) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, não é bijetora porque não é injetora (ou porque não é sobrejetora).

5) Evidentemente, uma função f: $A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para todo $b \in$ B, a equação $f(x) = b$ possui uma única solução $a \in$ A. Logo, se A e B são subconjuntos de R, f: $A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para toda reta $y = b$, $b \in$B, a interseção do gráfico de f com essa reta ocorre em um único ponto.

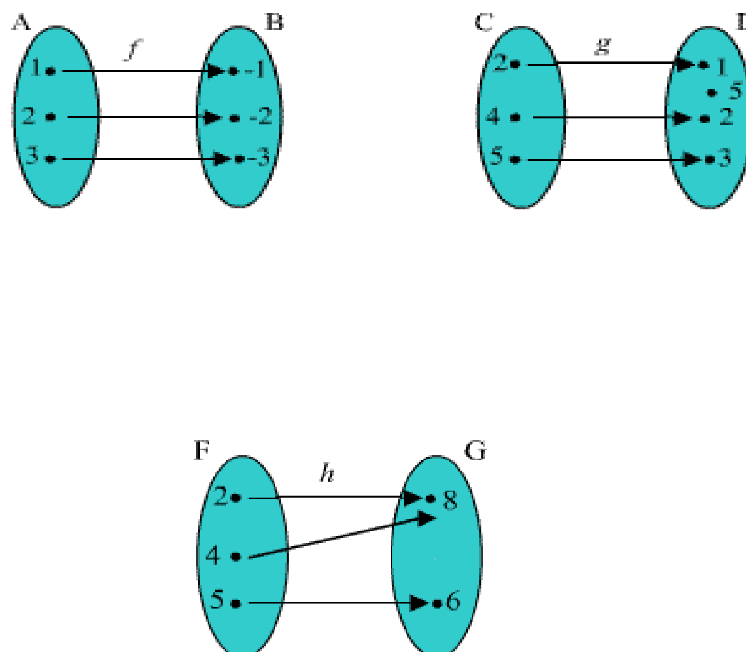
Proposição

Se f: A $\rightarrow$ B e g: B $\rightarrow$ C são funções bijetoras, então g ***o*** f: A $\rightarrow$ C é bijetora.

D] Já vimos que composta de funções injetoras é injetora e que a composta de funções sobrejetoras é sobrejetora; logo se f: A $\rightarrow$ B e g: B $\rightarrow$ C são funções bijetoras, então g ***o*** f: A $\rightarrow$ C é bijetora.

12.4 FUNÇÃO INVERSA

Consideremos as funções, *f, g e h,* definidas pelos diagramas



É possível obtermos funções de B em A, ou de D em C, ou ainda de F em E, invertendo os sentidos das flechas?

Podemos observar que só é possível no caso da função *f.* Para as funções *g* e *h, a* definição de função não é satisfeita.

Definição

Dizemos que a função $g: B \to A$ é a *inversa* da função $f: A \to B$, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Decorre da definição:

1) gof = Id_A e fog = Id_B.

2) y = f(x), se somente se, x = g(y), para todo $x \in$ A e para todo $y \in$ B.

3) g é a inversa de f, se e somente se, f é a inversa de g.

Da igualdade $g(f(x)) = x$, para todo $x \in$ A, segue que f é injetora, pois para todo x_1 e x_2 $\in$ A , $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. E se $f(g(y)) = y$ para todo $y \in$ B, temos que f é sobrejetora pois, dado $y \in$ B, arbitrário, podemos tomar $x = g(y) \in$ A e temos $f(x) = f(g(y))$ $= y$.

Logo , se f: A → B possui um inversa então f é bijetora.

Por outro lado, se f: A → B é bijetora então possui uma inversa g: B → A. De fato, como f é bijetora para cada $y \in$ B, existe um único $x \in$ A , tal que y = f(x), definamos g: B → A como sendo g(y) = x. É claro que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in$ A e $y \in$ B..

Concluímos assim, que

Uma função f: A → B bijetora, se e somente se, possui um inversa g: B → A.

Quando g: B → A é a inversa de f: A → B, escrevemos $g = f^{-1}$.

Exemplos:

1) A função $f: R - \{1\} \to R - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ é bijetora (já foi provado anteriormente), a sua inversa é a função $g: R - \{2\} \to R - \{1\}$, definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

De fato, $g(f(x)) = \dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x+1}{x-1}-2} = x$, para todo $x \in R - \{1\}$ e $f(g(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{x+1}{x-2}-1} = x$, para todo $x \in R - \{2\}$.

2) Dadas as funções $f: R \to [0,+\infty)$ e $g: [0,+\infty) \to R$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$, temos que $f(g(y)) = y$ para todo $y \geq 0$. No entanto, $g(f(x))$ só é igual a x quando $x \geq 0$. Se x for

negativo, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = -x$. Logo g não é a inversa de f. *Na verdade,* f não possui inversa, pois não é injetora.

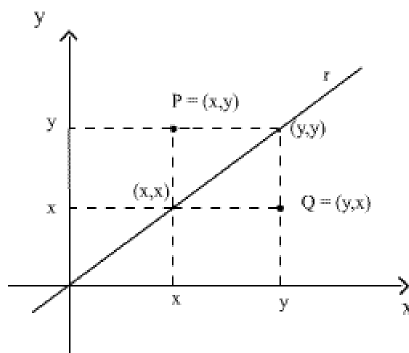
Se considerarmos a função F: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, restrição de f a $[0, +\infty)$, temos que f é bijetora, e sua inversa é a função G: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $G(y) = \sqrt{y}$, porque

$$G(F(x)) = \sqrt{x^2} = x \quad \text{e} \quad F(G(y)) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Gráfico da função inversa

Existe uma relação interessante entre o gráfico de uma função f e o de sua inversa f^{-1}. Notemos da equivalência, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ que o ponto P = (x,y) está no gráfico de f se, e somente se, o ponto Q = (y,x) está no gráfico de f^{-1}.

Vejamos uma ilustração desta situação:



Como podemos observar os pontos P e Q são simétricos em relação à reta r (1ª bissetriz) e portanto o gráfico da função f é simétrico ao gráfico de sua inversa f^{-1} em relação à 1ª bissetriz.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dadas as funções $g(x) = (x+1)^2$ e $f(x) = \sqrt{x}$, determine fog.

2) Um exportador de café calcula que os consumidores comprarão , aproximadamente, (p) = 4,374 / p^2 quilogramas de café por semana, quando o preço é de p Reais por quilograma. Estima-se que, daqui a t semanas, o preço do café será de $p(t) = 0{,}04t^2 + 0{,}2t + 5$ Reais por quilograma. Expresse o consumo semanal de café como função de *t*.

3) Nos exemplos a seguir, determine gof :

a) $f(x) = 1 - 1/x$ e $g(x) = 1/(1-x)$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $f(x) = 1/x$

4) Use a definição para verificar que as funções a seguir são injetoras:

a) $f : R - \{-1\} \to R - \{3\}$ definida por $f(x) = (3x+2)/(x+1)$

b) $f : R^2 \to R^2$ definida por $f(x,y) = (2x, 3y)$

5) No exercício anterior use a definição para verificar que as funções dadas são sobrejetoras.

6) Determine as funções inversas das funções dadas no exercício 4).

7) Esboce o gráfico e classifique cada uma das funções seguintes em :

i) Injetora ii) Sobrejetora iii) Bijetora iv) Não injetora e não sobrejetora.

a) $f : R \to R$ definida por $f(x) = x.|x-1|$.

b) $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

8) Dadas as funções *f*(*x*) e *g*(*x*), reais e de variáveis reais, mostre que:

a) *f*(*x*) e *g*(*x*) crescentes $\Rightarrow$ (*gof*) (*x*) é crescente.

b) $f(x)$ e $g(x)$ decrescentes $\Rightarrow (gof)(x)$ é crescente.

c) $f(x)$ decrescente (*crescente*) e $g(x)$ crescente (*decrescente*) $\Rightarrow (gof)(x)$ é decrescente.

(*Observe que valem resultados análogos quando se substitui crescente e decrescente, respectivamente, por estritamente crescente e estritamente decrescente)*

9) Um balão de ar quente é liberado à 1 hora da tarde e sobe verticalmente à razão de 2m/s. Um ponto de observação está situado a 100m do ponto do chão diretamente abaixo do balão (veja figura). Sendo t o tempo em segundos, após 1 da tarde, exprima a distância d do balão ao ponto de observação em função de t.

10) As posições relativas de uma pista de aeroporto e de uma torre de controle de 6,1m de altura são ilustradas na próxima figura. A cabeceira da pista está a uma distância perpendicular de 100 metros da base da torre. Se x é a distância percorrida na pista por um avião, expresse a distância d entre o avião e a torre de controle como função de x.

13.	*RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS*

Capítulo 1

1.1 a) $(-\infty, -1) \cup (1/3,\ 3)$; b) (-3,-2) $\cup$ $[-3/2, +\infty)$

1.2 a) F ; b) F; c) V; d) V

Capítulo 2

2.1 a) { -3,+3}; b) $(-\infty, -\frac{8}{5}] \cup [0, +\infty)$; c) $(-\infty, \frac{7}{3}]$;

d) $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$; e) $(-\infty, -1) \cup [-1, \frac{1}{5}] \cup [1, +\infty)$

Capítulo 3

3.1 a) R – { -1, 1 }; b) [-1, 3]; c) $(-\infty, -2] \cup$ (1, 2]; d) {-3,3}

3.2 a) R^*; b) $n \in N^*$; c) 7 minutos;

d) O tempo se aproxima de 3 minutos mas não atinge esse tempo. O rato não conseguirá percorrer o labirinto em menos de 3 minutos.

3.3 a) R – {-1 }; b) 19.400 pessoas; c) 66 pessoas aproximadamente;

d) se aproximará de 20.000 pessoas,embora não alcance esse número.

3.4 $m_T = k(T - T_a)$; T é a temperatura do objeto, T_a é a temperatura ambiente.

3.5 $M_p = k(n - d)d$; onde M_p é a média de propagação da epidemia, n é o nº pessoas, e d é o nº de pessoas doentes.

Capítulo 4

4.1 a) $S_G = 80t + 5$ e $S_P = 60t + 20$; b) Os carros se encontram no km 65.

c) Os carros não se encontram;. 4.2. $F = \dfrac{9}{5}C + 32$; 4.3. C(x) = 1,5x + 100

4.4 Primeira agência, se rodar menos que 25km, segunda agência se rodar mais que 25km.

4.5 O herói não alcançará a fronteira pois eles se encontram no km 70 da estrada.

4.6 340 m ; 4.7 a) V = 157 + 3t; b) 289 veículos; 4.8 b) t = 1,08 anos

Capítulo 5

5.2 Não é crescente em R. De fato, 3<4 e f(3) = 4 > f(4) = 0

5.3 f é crescente em $(-\infty,-1]$ e $[0,+\infty)$; f é decrescente em $[-1,0)$.

5.4 Não. $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente em $(-\infty,0)$ e em $(0,+\infty)$

Capítulo 6

6.2 a) [– 3,1/2]; b) {– 1}; c) $\varnothing$;

6.3 a) $[-3,1/2] \cup (1,+\infty)$; b) (–3, 1/2) ; 6.4 D = 50km ;

6.5 $y = -x^2 + 4x$;

6.6 a) h = 60m; b) t = 3 seg; c) $h_{máx} = 80m$; d) $0 \leq t \leq 8$

6.7 x = y = p/4; 6.8 x = y = 3

6.9 1 < t < 6 6.10 R$1,75.

Capítulo 9

9.1 a) D(f) = R; Im(f) = R ; f é estritamente crescente em R;

b) D(f) = R; Im(f) = R_+ ; f é decrescente em $(-\infty,0]$ e crescente em $[0,+\infty)$;

c) D(f) = R – {3}; Im(f) = R – {–1}; f é decrescente em $(-\infty,3)$ e em $(3,+\infty)$;

d) D(f) = R ; Im(f) = R ; f é estritamente crescente em R;

e) D(g) = R-{1}; Im(g) = $(-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$; g é decrescente em $(-\infty,-1] \cup [0,1)$ e em $(1,2]$; g é crescente em $[-1,0] \cup [2,+\infty)$;

f) $D(g|x|) = R - \{-1,1\}$; $Im(g|x|) = (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$; é decrescente em $(-\infty,-2] \cup [0,1)$ e em $(1,2]$; é crescente em $[-2,1)$ e em $(-1,0] \cup [2,+\infty)$;

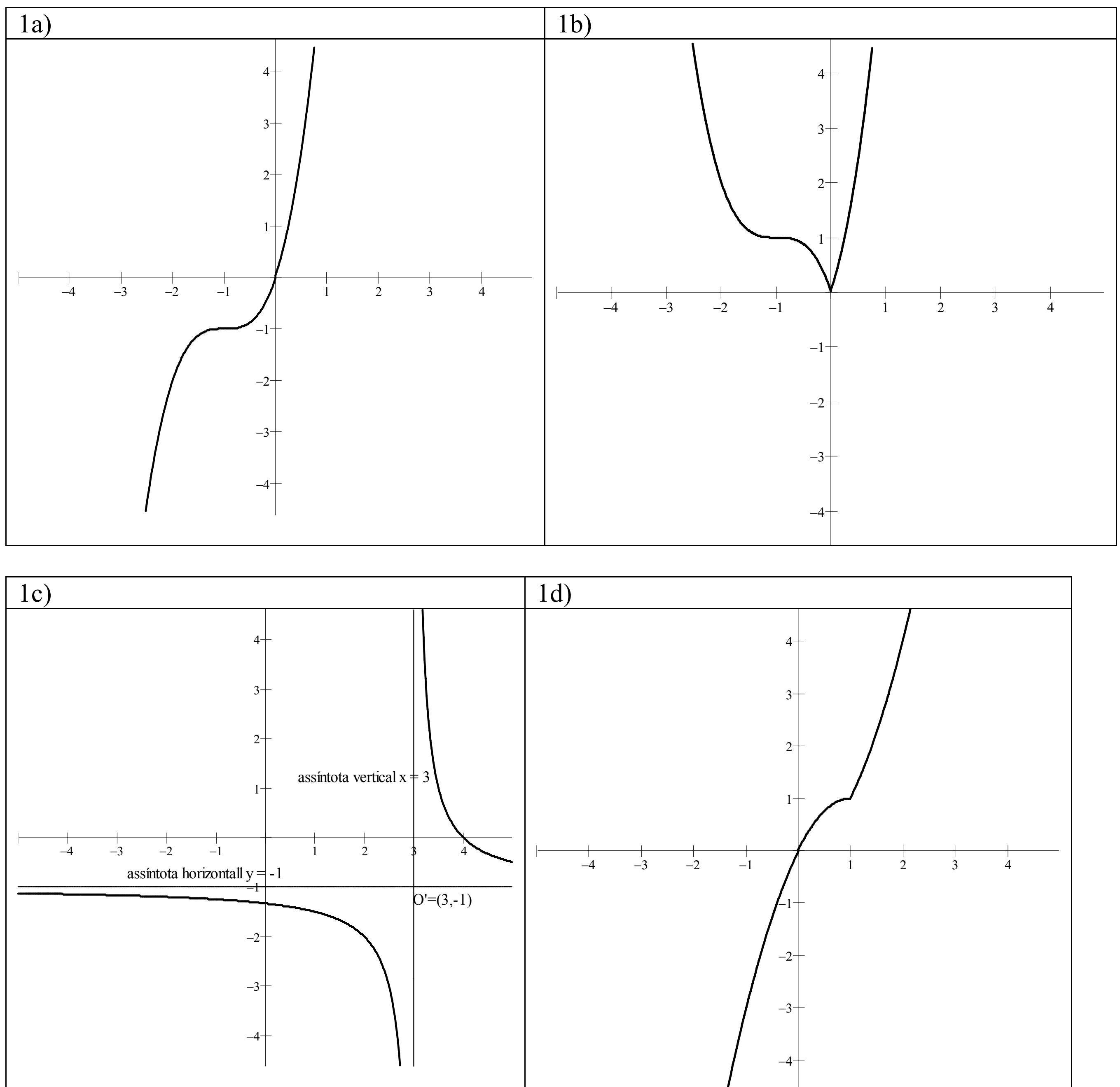
g) D(g(x-2)) = R–{3}; Im (g(x-2)) = Im(g) ; é decrescente em

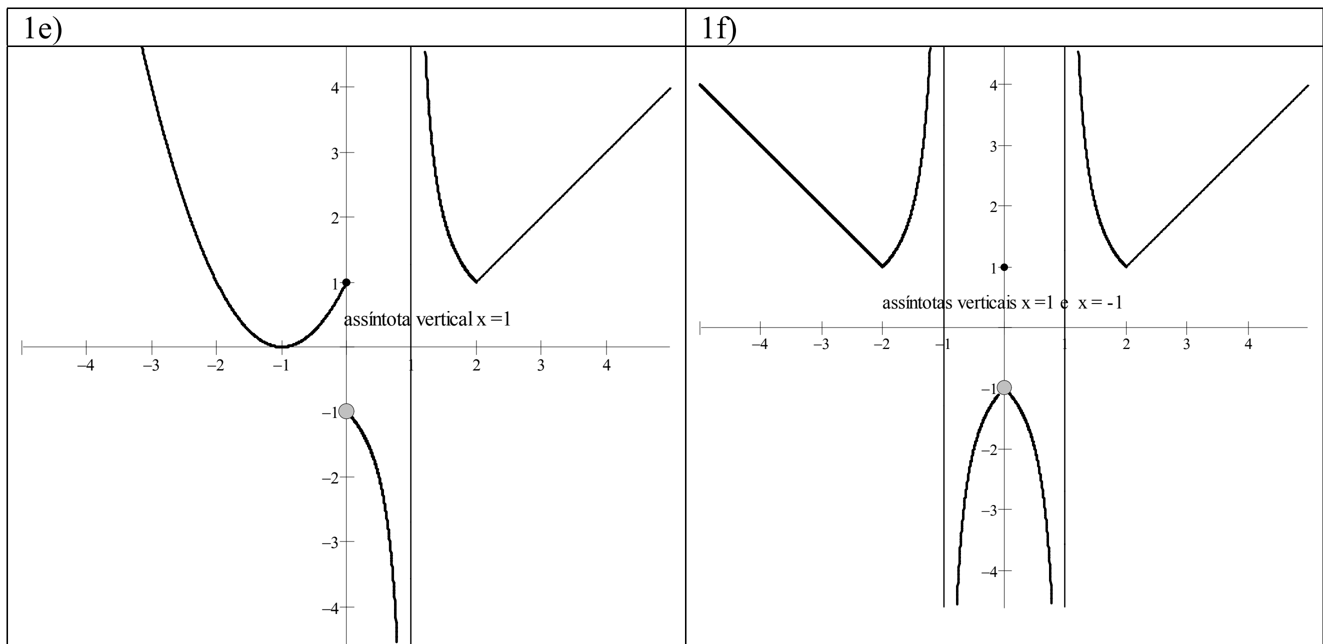
$(-\infty, 1] \cup (2,3)$ e em $(3, 4]$; é crescente em $[1, 2] \cup [4,+\infty)$;

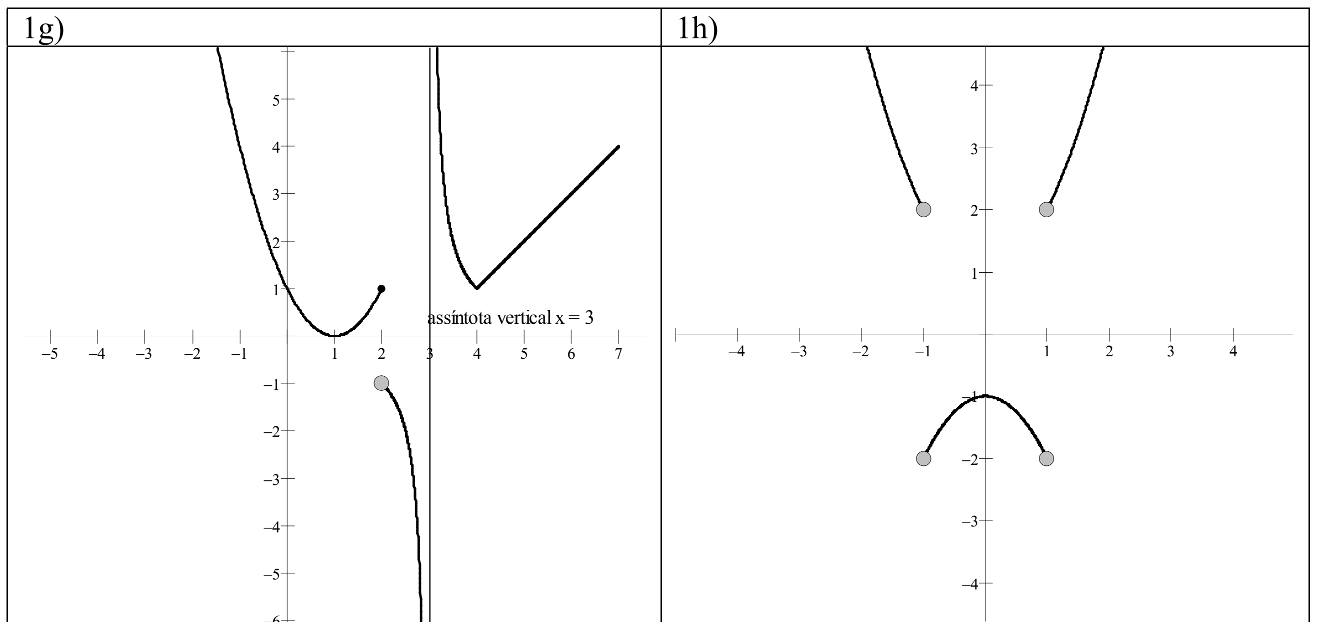
h) D(f) = $R - \{-1, 1\}$; $Im(f) = (-2,1] \cup (2,+\infty)$; f é decrescente em

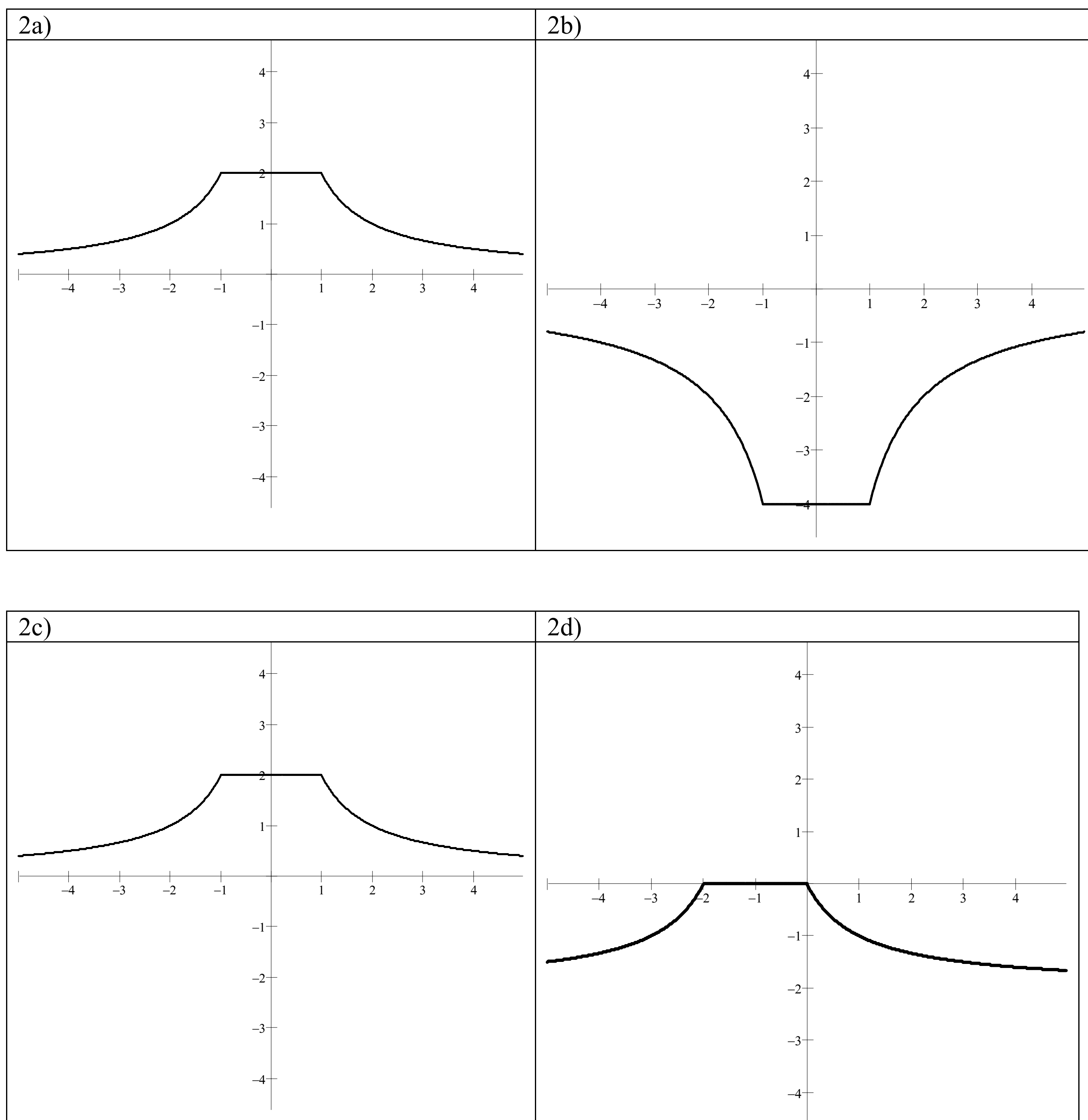
$(-\infty,-1) \cup [0,1)$; f é crescente em $(-1, 0] \cup (1,+\infty)$

Gráficos




1e)
assíntota vertical x =1
1f)
assíntotas verticais x =1 e x = -1


1g)
assíntota vertical x = 3
1h)



Capítulo 10

10.1 a) $(f-g)(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x \neq 0\\ -1 & \text{se } x=0\end{cases}$, $(f.g)(x)=x^2$ e $(f/g)(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

e todas possuem domínio igual a R.

10.3 I a) Dia 05; I b) Dias 17 e 18; II a) $N(x) = \begin{cases} 30 + x & \text{se } 1 \le x \le 15 \\ 45 & \text{se } 15 < x \le 31 \end{cases}$

II b) $L(x) = \begin{cases} 4 - (0,1)x & \text{se } 1 \le x \le 15 \\ [(-0,1)x^2 + x + 120]/45 & \text{se } 15 < x \le 31 \end{cases}$; II c) Quociente

Capítulos 11, 12

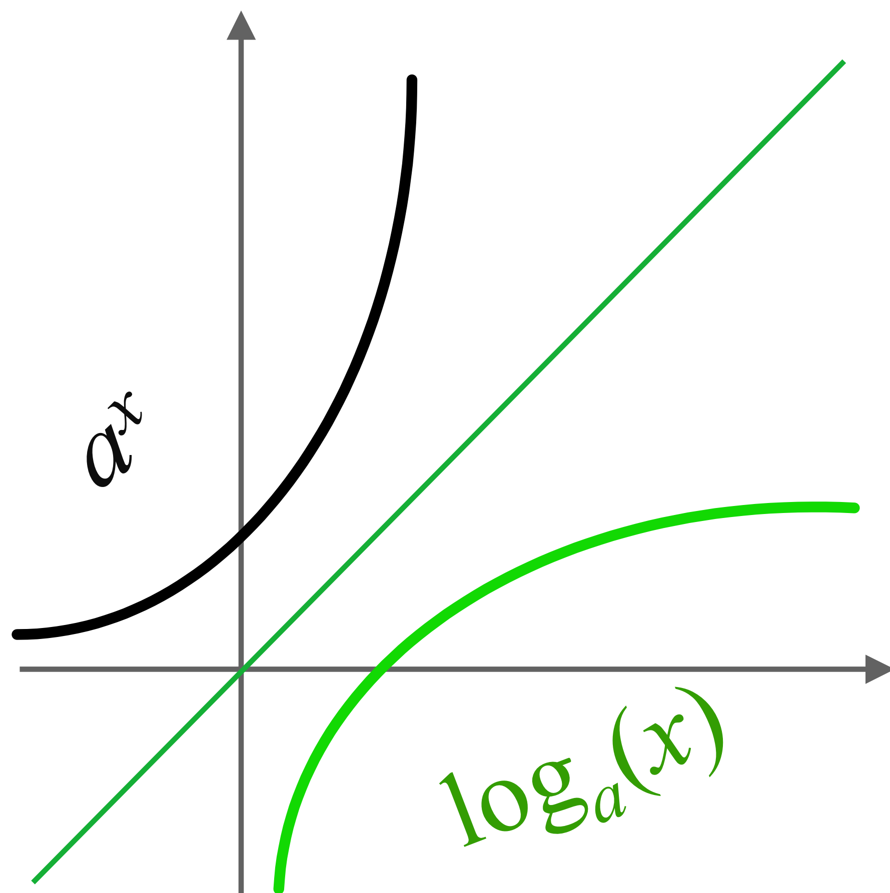
9) $d(t) = \sqrt{4t^2 + 10.000}$;

10) $d(x) = \sqrt{x^2 + (6,1)^2 + (100)^2} = \sqrt{x^2 + 10.037,21}$

14. *BIBLIOGRAFIA*

- Aaboe, Ager - Episódios da História Antiga da Matemática - S. B. M.
- Hoffmann, Laurence D. - Cálculo, Um Curso Moderno e Aplicações, Ed. Livros Técnicos e Ciêntíficos
- Iezzi, Gelson [et al.] - Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 1- Ed. Atual
- Leithold, Louis - Cálculo com Geometria Analítica - vol. 1 - Ed. Harbra
- Lehmann, Charles - Geometria Analítica - Ed. Globo
- Lima, Elon L. - Curo de Análise - vol. 1 - Projeto Euclides
- Neto, Aref A. [et. al.] - Conjunto e Funções 2º Grau - Ed. Moderna
- Niven, Ivan - Números Racionais e Irracionais - S. B. M.
- _________ , Revista do Professor de Matemática - diversos volumes - S. B. M.
- Swokowski, Cálculo com Geometria Analítica - vol. 1 - Ed. Makron Books
- Trota, Imenes, Jakubovic - Matemática Aplicada 2º Grau - Ed. Moderna LTDA

Exponenciais e Logaritmos



Adelmo Ribeiro de Jesus
Eliana Prates Soares
Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Graça Luzia Dominguez Santos
Ilka Rebouças Freire
Maria Lúcia Borges Gomes
Miriam Fernandes Mascarenhas



Instituto de Matemática da UFBA

1. UMA RAZÃO PARA OS LOGARITMOS

1.1. INTRODUÇÃO

Os logaritmos foram inventados, no começo do século XVII, como um instrumento para facilitar e simplificar o cálculo aritmético, permitindo que se efetuassem, com maior rapidez, operações complicadas, para a época, como o produto de números muito grandes ou uma potenciação com expoente fracionário. Isto foi possível, como veremos brevemente, devido a propriedade dos logaritmos de transformarem produto em somas, quociente em diferenças, potências em produtos, etc. Sua utilidade desde aquela época até bem recentemente, foi incontestável e os serviços que prestaram foram reconhecidos e elogiados por todos.

Do ponto de vista do ensino da Matemática, entretanto, a importância do ensino dos logaritmos, até por volta de 1960, devia-se à sua utilização como instrumento de cálculo. Ultimamente, todavia, com o advento dos computadores e das calculadoras de bolso, os logaritmos perderam essa importância. A perda de importância dos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético teve um reflexo crucial: tornou-se obsoleto o interesse especial que tinham os logaritmos decimais. O manuseio das tábuas logarítmicas, o uso de termos como característica, mantissa, antilogaritmo, tiveram seus dias de glória e tudo isto hoje está sendo guardado nas estantes da História.

Por que então continuamos a estudar logaritmos? Agora, a justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento, como teremos oportunidade de ver, em quantidade e importância

suficientes para justificar o enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia.

Por isso é que, mesmo com o advento e o uso universal das máquinas calculadoras, e a consequente perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético, a importância científica dos mesmos não diminuiu nos dias de hoje e podemos afirmar sem exageros, que enquanto houver Ciência haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais.

Em consequência disso, é preciso que seu ensino se adapte a esta nova realidade. Deve ser considerado, sem preconceitos, logaritmos em qualquer base, tendo em conta, porém, o grande destaque dos *logaritmos naturais*, aqueles que têm por base o número e, bem como a função exponencial correspondente.

Mas, por que a função exponencial e^x é mais importante que as outras exponenciais, como 2^x ou 10^x? Por que preferir o logaritmo natural e não o decimal ou o logaritmo em qualquer outra base?

Afinal, quem é este tal de número e ?

O nosso objetivo é tentar responder a estas perguntas em nível do 2º grau, procurando dar uma visão desses tópicos, dando ênfase na importância atual e moderna das suas aplicações.

1.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Textos babilônios de cerca de 600A.C. trazem a seguinte questão que, em linguagem moderna, é posta num problema: ***"A que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado?"*** Esta questão equivale à nossa: Qual o logaritmo de um número dado, tendo um certo número como base? No 2º grau é comum se introduzir o logaritmo, baseado no conceito de exponenciação. A definição tradicional diz que: *" O logaritmo de um número positivo* x *num sistema de base* a $(a > 0$ e $a \neq 1)$ *é o expoente* y a *que se deve elevar a base* a *de modo que se tenha* $a^y = x$ *".* Em símbolos escrevemos assim:

$$\boldsymbol{log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Esta definição, como se vê, exige o conhecimento prévio do que seja potência com expoente real qualquer. (Existe uma outra maneira de se definir logaritmos, através de uma área, o que explora portanto um aspecto geométrico. Optamos pela definição clássica de logaritmo como um expoente, apesar das dificuldades que temos de explicar o significado de expoentes irracionais como, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$).

No final do século XVI, o desenvolvimento da astronomia, da navegação e do comércio exigia que se realizassem longos e trabalhosos cálculos aritméticos. Também neste século já eram praticados empréstimos ou investimentos a juros. Vejamos um exemplo:

Imaginemos que uma pessoa tenha empregado uma quantia **Q** a 15% ao ano. Isto significa que ao fim de cada ano, o capital empregado no inicio do referido ano deve crescer de 15%. Assim, após um ano, o montante será o capital inicial **Q** acrescido de 15% de seu valor:

$$\mathbf{Q + \frac{15}{100}Q = (1 + 0{,}15)Q = 1{,}15Q}\,.$$

Depois de 2 anos, o montante será:

$$\mathbf{(1{,}15)Q + (0{,}15)(1{,}15Q) = (1{,}15)(1{,}15)Q = (1{,}15)^2 Q}\,.$$

Analogamente, depois de 3 anos: $\mathbf{(1{,}15)^3 Q}$ e depois de n anos temos a expressão:

$$\boldsymbol{M = (1{,}15)^n Q} \qquad \text{(I)}$$

onde $\boldsymbol{M}$ é o montante, $\boldsymbol{Q}$ é a quantidade empregada inicialmente e $\boldsymbol{n}$ é a duração do investimento (ou empréstimo) em anos.

E se o dinheiro fosse retirado após 2 anos e 197 dias?

Já no século XVI, sabia-se que, no caso de empréstimos a juros compostos, expressões do tipo (I) podiam ser utilizadas, mesmo que a duração do empréstimo n, não fosse um natural . Portanto, em (I)

$$n = 2 + \frac{197}{360} = \frac{917}{360} \quad , \quad \text{e então}$$

$$M = Q(1{,}15)^{\frac{917}{360}} .$$

Uma vez conhecida a definição da raiz n-ésima de um número a obtemos o significado para $a^{\frac{p}{q}}$, ou seja, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Assim sendo, como calcular

$$M = Q(1{,}15)^{\frac{917}{360}} = Q\sqrt[360]{(1{,}15)^{917}} \;\; ?$$

Se hoje ainda este cálculo demanda algum esforço, imagine naquele tempo!

No século XVI, as operações eram classificadas em três espécies:

1ª espécie: adição e subtração

2ª espécie: multiplicação e divisão

3ª espécie: potenciação e radiciação

Como os cálculos eram trabalhosos, na falta de máquinas calculadoras e de computadores se recorria a grandes tabelas que reduziam operações de 2ª e de 3ª espécies em operações de 1ª espécie.

Para se ter uma idéia de como as multiplicações eram feitas, consideremos o exemplo de como se efetuar a multiplicação 1525 x 321 (os números usados poderiam ser bem maiores).

Usava-se a fórmula:

$$\boxed{x . y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

Efetuava-se o cálculo: $1525 \text{x} 321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2$ e recorria-se á tabela:

N	...	1203	1204	1205	...	1846
$(N/2)^2$	...	361802,25	362404	363006,25	...	851929

Assim, $1525 \text{x} 321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2 = 851929 - 362404 = 489525$

Outro recurso utilizado era o uso da fórmula:

$$\boldsymbol{\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}$$

(A trigonometria já era bastante conhecida naquele tempo!). Para calcular, por exemplo, 0,8988 x 0,9455 observava-se que 0,8988 ≅ cos 26°, 0,9455 ≅ cos 19°, cos 45° ≅ 0,7071 e cos 7° ≅ 0,9925.

(Fórmulas como as duas últimas apresentadas são chamadas de fórmulas de prostaférese, transformam produtos em soma).

Na procura de fórmulas que transformassem operações de 2ª em 1ª espécie, um tipo de tabela acabou chamando a atenção dos matemáticos pela sua simplicidade. Eram tabelas que calculavam produtos particulares de potências. Vejamos um exemplo simples do uso destas tabelas no cálculo de 16 x 32:

Consideremos uma tabela de potências de 2:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Temos que $16 = 2^4$ e $32 = 2^5$ · Para multiplicarmos 16 por 32 basta somar os valores correspondentes dos expoentes na tabela (no caso 4 + 5) e ver qual o termo que corresponde a esta soma, conforme indicam as setas na figura a seguir:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	**...**
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**...**

Observemos que a propriedade hoje formalizada por:

$$a^m \cdot a^n = a^{n+m}$$ **(Propriedade Fundamental)**

era fortemente usada e de certa forma transformava o produto em soma.

Analogamente, a divisão, como operação inversa da multiplicação podia ser feita, seguindo, na tabela, o sentido contrário das setas.

Consequentemente, era conhecida a propriedade que formalizamos hoje como:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$, **para m > n**

Como caso particular, se ***m = n + 1***, temos:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = a^1$$, **para todo n natural**

Assim, por exemplo, a **razão** entre 128 e 64 é igual á razão entre 32 e 16, e assim por diante.

Os números situados na 2ª linha de cada tabela foram depois chamados de *logaritmo* (***logos*** - razão, ***arithmos*** - número).

Conservando a idéia de razão, vejamos como é natural definir 2° e 2^{-n}, onde $n \in N$.

Como seria completada a seguinte tabela, dando o valor conveniente para *x* **?**

Potências	*x*	2	4	8	**...**
Expoentes (*logaritmos*)	0	1	2	3	**...**

Pretendemos que a razão entre 4 e 2 seja igual á razão entre 2 e *x*, ou seja,

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{x}$$

Assim, desse modo, $\boldsymbol{x = \frac{2.2}{4} = 1}$, ou seja, define-se

$$\boxed{\mathbf{2^0 = 1}}$$

Do mesmo modo, podemos completar a seguinte tabela, dando o valor conveniente para *y*,

Potências	*y*	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	**...**
Expoentes (logaritmos)	-1	0	1	2	3	**...**

de forma que a razão entre 2 e 1 e entre 1 e y sejam iguais, ou seja:

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{y}$$

Daí obtemos $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$. Logo,

$$\boxed{\mathbf{y = 2^{-1} = \frac{1}{2}}}$$

Analogamente definimos 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, etc.

Podemos observar na nossa primeira tabela uma progressão aritmética (**P.A.**) de razão igual a 1 (2ª linha) e uma progressão geométrica (**P.G.**) de razão igual a 2 (1ª linha).

Em geral, construímos tabelas de P.A. de razão 1 e P.G. de razão *a*:

P.G.	a^n	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	**...**
P.A.	n	1	2	3	4	5	6	7	8	**...**

Vamos agora inserir termos na nossa tabela de modo a ter uma P.A. de razão 1/2:

P.G.	1	x_1	2	x_2	4	x_3	8	x_4	...
P.A.	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	...

Se a razão de 2 para x_1 deve ser igual á razão de x_1 para 1 $\left(\frac{2}{x_1} = \frac{x_1}{1}\right)$, pois estes números estão em P.G., então x_1 deve ser o número tal que $x_1^2 = 2$ (o número que hoje denotamos por $\sqrt{2}$), considerando x_1 positivo. Portanto, é conveniente definir

$$\boxed{2^{\frac{1}{2}} = x_1 = \sqrt{2}}$$

Se 2, x_2 e 4 são termos consecutivos de uma P.G. então:

$$\frac{x_2}{2} = \frac{4}{x_2}$$

$$x_2^2 = 2.4 = 8 = 2^3$$

$$x_2 = \sqrt{2^3}$$

$$Logo, \qquad \mathbf{2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}}$$

Usando o mesmo processo encontramos a definição para $2^{\frac{m}{2}}$, m ∈ N.

Como faríamos para definir, por exemplo, $\mathbf{2^{\frac{1}{3}}}$?

Vamos agora inserir termos na nossa tabela de modo a obter uma P.A. de razão 1/3.

P.G.	1	x_1	x_2	2	x_3	x_4	4	...

P.A.	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	...

Temos assim que : $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{x_1}$ (1) *e* $\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{x_2}$ (2), o que nos dá:

De (1) $x_1^2 = x_2$ *e de (2),* $x_2^2 = 2x_1$, o que acarreta

$$x_1^3 = 2$$

É, portanto, conveniente definir $2^{\frac{1}{3}} = x_1$ onde x_1 é tal que $x_1^3 = 2$. (o número hoje denotamos por $\sqrt[3]{2}$).

Analogamente, utilizando o mesmo processo, encontramos um significado para o caso geral

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad p,\ q \in \mathrm{N}^*,\ a \in \mathrm{R}_+^*$$

Desde os babilônios já se tem registros de tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhante ás nossas tabelas atuais de logaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as 10 primeiras potências para as bases 9, 16, etc. As diferenças principais entre as tabelas antigas e as nossas, além da linguagem e notação, são que não é usado um número único como base em variadas situações e as lacunas que constam das tabelas antigas são muito maiores que as nossas. Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados.

Apesar de, como vimos, rudimentos do que viriam a ser futuramente os logaritmos, já serem conhecidos dos babilônios, a introdução dos logaritmos como instrumento que revolucionou totalmente a arte de calcular, dobrando o poder computacional dos astrônomos, ocorreu por volta do início do século XVII. Essa invenção é a atribuída universalmente ao nobre escocês John Napier (1550-1617).

Napier publicou a sua discussão dos logaritmos em 1614, sob o título de *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). O único rival de Napier como pretendente à invenção dos logaritmos foi um relojoeiro suiço, Jobst Burgi (1552-1632). A tábua de logaritmos de Burgi apareceu em 1620 sob o título de *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*. Ao que parece Napier e Burgi trabalharam independentemente, mas ambos buscavam um processo que tornasse mais simples os cálculos. A influência e o reconhecimento de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior que a de Burgi devido à data de publicação do seu trabalho além de seu relacionamento com professores universitários. Os dois, no entanto, foram guiados pelas mesmas influências. Partiram das propriedades das progressões aritméticas e geométricas estimulados, provavelmente, pelo método da prostaférese cuja fórmula a seguir já era conhecida

$$sen\,A\,sen\,B = \frac{1}{2}cos(A - B) - \frac{1}{2}cos(A + B)$$

De fato, já se conjeturou que a fórmula acima teria sido a origem das idéias de Napier, uma vez que ele construiu sua tábuas para logaritmos de senos de ângulos.

Embora muitas vezes o conceito de logaritmo esteja hoje associado ao de expoente, a apresentação original de Napier não se baseou nessa relação. A definição de logaritmo dada por Napier nada tinha a ver com expoentes - de fato, uma notação adequada e padronizada para expressar expoentes sequer havia sido desenvolvida plenamente até então. Na terminologia atual, se $a^x = y$, então o logaritmo de y na base a é x. Notemos que se x varia em P.A., y varia em P.G. Napier chegou a esta correspondência fundamental entre duas séries de números de modo geométrico, considerando as velocidades de dois pontos numa linha reta. Além disso, Napier não contava com a noção de base em seu sistema A possibilidade de definir logaritmos como expoentes foi reconhecida por John Wallis em 1685 e por Johann Bernoulli em 1694 .

Os logaritmos de base 10 - "*logaritmos comuns*", como são chamados hoje - foram calculados por Henry Briggs (1561-1631), professor da Universidade de Oxford e do

Grescham College de Londres. Seu interesse pelos métodos de Napier foi tão instigante que fez uma viagem ao encontro de Napier e durante esta visita os dois concordaram que as tábuas de Napier seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o de 10 fosse 1. Esta mudança resultou na invenção dos logaritmos "briggsianos" ou comuns , tão úteis nos cálculos.

2.	POTÊNCIAS E RAÍZES

2.1. POTÊNCIAS COM EXPOENTES INTEIROS

Vimos anteriormente alguns aspectos históricos das potências e dos logaritmos, bem como alguns processos que levaram à construção dos mesmos. Passaremos a seguir a um desenvolvimento mais formal da teoria das potências com o objetivo de termos condições de dar uma noção intuitiva do significado de uma potência de expoente irracional.

Sejam $a \in R_{+}^{*}$, e $n \in N^{*}$. A *potência* a^{n} é definida como o produto de n fatores iguais ao número a, ou seja,

$$a^{n} = \underbrace{a.a.a.a. \ldots .a}_{\text{n fatores}}$$

O número a é chamado de ***base*** e n ***expoente*** da potência a^{n}.

Propriedades

Sejam m, n $\in$ ***N*, a, b*** $\in$ ***R₊*.***

A₁) $a^{m}.a^{n} = a^{m+n}$ **(Propriedade Fundamental)**

A₂) $\dfrac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$ **se** $m > n$

A₃) $\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m.n}$

A₄) $(a.b)^{n} = a^{n}.b^{n}$

A₅) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n} = \dfrac{a^{n}}{b^{n}}$

Intuitivamente, é fácil observar que:

$$a^n . a^m = \underbrace{(a.a. \ldots a)}_{n \text{ fatores}} \underbrace{(a.a \ldots a)}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{a.a. \ldots a}_{n+m \text{ fatores}} = a^{n+m}$$

Uma demonstração rigorosa da Propriedade Fundamental e das demais propriedades é feita utilizando o processo da indução.

O objetivo agora é estender a definição para potência com expoentes inteiros. Para tal é preciso definir a^0 e a^{-n}, onde $n \in N$.

Faremos isso de modo que a Propriedade Fundamental seja preservada, isto é, que

$$a^0 . a^n = a^{0+n} = a^n \qquad \text{(I)}$$

$$a^{-n} . a^n = a^{-n+n} = a^0 \qquad \text{(II)}$$

De (I) observamos que é conveniente definir:

$$a^0 = 1$$

De modo semelhante, admitindo que $a^0 = 1$ em (II), chegamos á conclusão que a^{-n} deve ser igual a $\frac{1}{a^n}$.

Resumindo temos a seguinte

Definição

Sejam, $a \in R_+^*$ e $n \in N^*$. Definimos: $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a.a^{n-1} \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{cases}$

Observações

1) Se n < 0, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

2) Se $a < 0$ e $n \in Z$, fazem sentido as definições de a^n, a^0 e de a^{-n}.

Por exemplo, $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3)(-3)}$$

$$(-3)^0 = 1$$

É fácil verificar que se $a < 0$ temos $a^n > 0$, se n é par e $a^n < 0$ se n é ímpar. Entretanto, como veremos posteriormente, para a teoria das funções exponenciais e logarítmicas definições de potências com base negativa não são convenientes, já que não podem ser estendidas de modo geral a expoentes fracionários.

3) Não faz sentido a expressão $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para $a = 0$.

4) Não definimos 0^0. Devemos observar que não é conveniente definir 0^0 como sendo igual a 1; pois, se pensamos por um lado, que estamos estendendo para $a = 0$ a expressão $a^0 = 1, a \in R_+^*$, por outro lado, não estamos estendendo a expressão $0^n = 0.0.0...0,\ n \in N^*$ para n = 0. A inconveniência de definir 0^0 como sendo 1 pode ser vista com mais precisão no estudo de limite de funções no Cálculo Diferencial onde se mostra que 0^0 é uma "*indeterminação*"

As propriedades $A_1, A_2, ..., A_5$, vistas anteriormente são válidas também para números inteiros. Temos, portanto,

Propriedades

> ***Sejam a, b*** $\in$ R_+^*. ***Para quaisquer m, n*** $\in$ ***Z, tem-se:***
>
> **B₁)** $a^m.a^n = a^{m+n}$ **(Propriedade Fundamental)**
>
> **B₂)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
>
> **B₃)** $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$
>
> **B₄)** $(a.b)^n = a^n.b^n$
>
> **B₅)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Considerando as propriedades A_i dadas anteriormente para números naturais não nulos, apresentaremos as demonstrações de B_i.

B_1) $a^m.a^n = a^{m+n}$, $a \in R_+^*$, $\forall$ **m, n** $\in$ **Z.**

D]

Vamos analisar os seguintes casos:

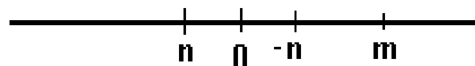
i) m > 0 e n > 0 (este caso recai em A_1)

ii) m < 0 e n < 0

Temos que −m > 0 e −n > 0. Assim, utilizando a definição e a propriedade A_1, temos:

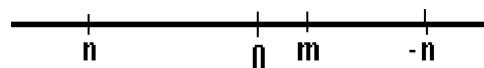
$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}}\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

iii) m > 0 e n < 0 (portanto −n > 0)



Se m > −n temos por A_2 que $a^m a^n = a^m \dfrac{1}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$

Se m = −n,



Se m < −n, $a^m a^n = \dfrac{a^m}{a^{-n}} = \dfrac{1}{\dfrac{a^{-n}}{a^m}} = \dfrac{1}{a^{-n-m}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$

iv) m = 0 ou n = 0

$$a^0 a^m = 1.a^m = a = a^{m+0}$$

B$_2$) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \in R_+^*$, $m, n \in Z$,

D]

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m.\frac{1}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n}$$

B$_3$) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$, $a \in R_+^*$, $m, n \in Z$

D] Vamos analisar os seguintes casos:

i) m > 0 e n > 0 (este caso recai em A_3)

ii) m < 0 e n < 0

Temos que −m > 0 e −n > 0. Assim,

$$\left(a^m\right)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{m.n}} = \left(\frac{1}{\dfrac{1}{a}}\right)^{m.n} = a^{m.n}$$

iii) m > 0 e n < 0

$$\left(a^m\right)^n = \frac{1}{\left(a^m\right)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$$

iv) m < 0 e n > 0

Temos que $-m > 0$ e $n > 0$. Vamos portanto aplicar A_5 e A_3 para $-m$ e n. $\left(a^m\right)^n = \left(\dfrac{1}{a^{-m}}\right)^n = \dfrac{1}{\left(a^{-m}\right)^n} = \dfrac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$

v) m = 0 ou n = 0

$$\left(a^0\right)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0.n}$$

Análogo para n = 0

B_4) $(a.b)^n = a^n.b^n$, $a, b \in R_+^*$, $n \in Z$

D]

i) n > 0 (recai em A_4)

ii) n < 0

Neste caso $-n > 0$. Podemos aplicar A_4 para $-n$:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}.b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}\frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n$$

iii) n = 0

$$(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$$

B_5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $a, b \in R_+^*$, $n \in Z$

D]

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a\frac{1}{b}\right)^n = (a)^n\left(\frac{1}{b}\right)^n = (a)^n\left(b^{-1}\right)^n = a^n b^{-n} = a^n \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$$

2.2. RAÍZES E POTÊNCIAS COM EXPOENTES FRACIONÁRIOS

Nosso objetivo agora é definir a potência $a^{\frac{p}{q}}$, $p, q \in Z$, $q \neq 0$. Para isto é necessário introduzir a definição e alguns resultados referentes à raiz n-ésima de um número.

Definição

Sejam $a > 0$ e $n \in N^*$. Chama-se *raiz n-ésima* de *a,* o número real positivo b tal que $b^n = a$.

Notação: $b = \sqrt[n]{a}$

Observações

1) Pela definição, $\sqrt[1]{a} = a$.

2) Por convenção $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

3) Se $a < 0$ pode-se definir $\sqrt[n]{a}$, no caso em que n é ímpar: $\sqrt[n]{a}$ é o número real b tal que $b^n = a$. Neste caso, $b < 0$. Por exemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$ pois $(-2)^3 = -8$. É claro, trabalhando com os números reais, que a definição de $\sqrt[n]{a}$ não faz sentido se n é par e $a < 0$, pois não existe um número real b tal que $b^n = a$, $a < 0$ e $b^n > 0$. Assim, $\sqrt{-4}$ não faz sentido em R.

4) Se $a = 0$, definimos $\sqrt[n]{0} = 0$ e a definição anterior pode ser estendida da seguinte forma: Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $b^n = a$ então $\sqrt[n]{a} = b$.

Propriedades

Sejam a, b $\in$ ***R₊, m, n, p*** $\in$ ***N****

R$_1$) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
R$_2$) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, **se** $b \neq 0$**.**
R$_3$) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
R$_4$) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
R$_5$) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p.n]{a^{p.m}}$

R$_1$) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ **,** $a, b \in R_+$**,** $m \in N^*$

D] Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Então $x^n = a$ e $y^n = b$. Daí

$$a.b = x^n y^n = (x.y)^n$$

Como $x.y \geq 0$, então $x.y = \sqrt[n]{ab}$, ou seja, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = x.y = \sqrt[n]{ab}$.

R$_2$) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ **,** $a, b \in R_+$**,** $b \neq 0, n \in N^*$

D] Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Então $x^n = a$ e $y^n = b$. Daí

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

Como $\dfrac{x}{y} \geq 0$, $\dfrac{x}{y} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$. Portanto, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

R$_3$) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ **,** $a \in R_+$**,** $n, m \in N^*$

D] Seja $x = \sqrt[n]{a}$. Então $x^n = a$ e $x^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Temos

$$a^m = \left(x^n\right)^m = x^{nm} = \left(x^m\right)^n \Rightarrow x^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

R_4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$, $a \in R_+$, $n, m \in N^*$

D] Sendo $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[m]{x}$, temos $x^n = a$ e $y^m = x$

$$y^m = x \Rightarrow \left(y^m\right)^n = x^n \Rightarrow y^{mn} = x^n \Rightarrow y = \sqrt[mn]{x^n} ,$$

ou seja,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = y = \sqrt[mn]{x^n} = \sqrt[mn]{a}$$

R_5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p.n]{a^{p.m}}$, $a \in R_+$, $n, m, p \in N^*$

D]

$$\sqrt[n]{a^m} = x \Rightarrow x^n = a^m \Rightarrow \left(x^n\right)^p = \left(a^m\right)^p \Rightarrow x^{np} = a^{mp} \Rightarrow x = \sqrt[pn]{a^{pm}}$$

A definição da raiz n-ésima de um número real positivo nos permite estender a noção de potência de um número real positivo de modo a incluir expoentes fracionários da forma *m/n, m, n* ∈ Z, *n* > 0. Queremos dar esta definição de modo a conservar as propriedades anteriores de potências. Por exemplo, análogo à propriedade B_3 desejamos que:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\left(\frac{m}{n}\right).n} = a^m$$

Assim sendo devemos ter: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Definição

Dado o número real positivo a e o número racional $\frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $n > 0$, então definimos

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Observações

1) Em particular, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2) Se $a = 0$ e $\frac{m}{n} > 0$, podemos considerar $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0$.

3) Se $a < 0$ e n é ímpar então a expressão $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ também está definida.

Propriedades

Sejam $a, b \in R_+^*$, $m, n, p, q \in Z$, $n > 0$, $q > 0$.

C_1) $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$

C_2) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$, ***sendo*** $a \neq 0$

C_3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} . \frac{p}{q}}$

C_4) $(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}}$

C_5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{m}}}$, ***sendo*** $b \neq 0$

Como caso particular de C_2 temos $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{-\frac{p}{q}}$.

C_1) $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, $a \in R_+^*$, $m, n, p, q \in Z$, $n > 0, q > 0$

D]

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qn]{a^{qm}}\,\sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[qn]{a^{qm}a^{pn}} = \sqrt[qn]{a^{qm+pn}} =$$

$$= a^{\frac{qm+pn}{qn}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

C_2) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, $a \in R_+^*$, $m, n, p, q \in Z$, $n > 0, q > 0$

D] A demonstração é semelhante à anterior, utilizando R_2), R_5) e B_2).

C_3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}$, $a \in R_+^*$, $m, n, p, q \in Z$, $n > 0, q > 0$

D]

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{\left(a^m\right)^p}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} =$$

$$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}}$$

C_4) $(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}}$, $a, b \in R_+^*$, $m, n \in Z$, $n > 0$

D]

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

C5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, $a, b \in R_+^*, m, n \in Z, n > 0$

D] A demonstração é semelhante à anterior, utilizando B_5) e R_2).

Provaremos a seguir alguns resultados que serão necessários para se estender a definição de potências com expoente real.

Proposição 2.1

Sejam $a \in R_+^* - \{1\}$, $m, n \in N$.

i) Se $0 < a < 1$ e $n < m$ então $a^n > a^m$.

ii) Se $a > 1$ e $n < m$ então $a^n < a^m$.

D]

i) $a < 1$ e $a > 0 \Rightarrow a.a < a \Rightarrow a^2 < a \Rightarrow a.a^2 < a.a \Rightarrow a^3 < a^2$.

Continuando com este processo obtemos

$$a^m < a^{m-1}$$

e usando a transitividade temos

$$a^m < a^{m-1} < a^{m-2} < a^{m-3} < \ldots < a < 1$$

Se $m > n$, $m = n + k$., $k \in N^*$.

Assim, $$a^m = a^{n+k} < a^{(n+k)-1} < a^{(n+k)-2} < \ldots < a^{(n+k)-k} = a^n$$

ii) Análogo ao item anterior

Proposição 2.2

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

i) Se $0 < a < 1$ e $n < m$ então $a^n > a^m$.

ii) Se $a > 1$ e $n < m$ então $a^n < a^m$.

D]

ii) Existem três casos a considerar.

1. Se $n > 0$ e $m > 0$ recaímos na Proposição 2.1.

2. Se $n < 0$ e $m < 0$ então $-n > 0$ e $-m > 0$. Como $n < m$ então $-m < -n$. Segue da Proposição 2.1 que

$$a^{-m} < a^{-n} \Rightarrow \frac{1}{a^m} < \frac{1}{a^n} \Rightarrow \frac{1}{a^m} - \frac{1}{a^n} < 0 \Rightarrow \frac{a^n - a^m}{a^n a^m} < 0 .$$

Sendo $a^m > 0$ e $a^n > 0$, podemos concluir que $a^n < a^m$.

3. Se $n < 0$ e $m > 0$ (análogo para o caso $n > 0$ e $m < 0$), temos que é crescente a sequência de potências com expoente negativos (item 2), isto é,

$$\ldots a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < 1$$

e também a sequência de potências com expoentes positivos (Proposição 2.1), ou seja,

$$1 < a < a^2 < a^3 < \ldots$$

logo,

$$a^n < \ldots < a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < 1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^m ,$$

portanto,

$$a^n < a^m .$$

i) Análogo ao item ii)

Proposição 2.3

Se $n \in N^*$ e $0 < a < b$ então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

D]

Da definição de raiz n-ésima e lembrando que a >0 e b > 0, temos

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a \qquad e \qquad \sqrt[n]{b} = y \Leftrightarrow y^n = b$$

Por hipótese, $b - a > 0$; logo, $y^n - x^n > 0$. Daí,

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}) > 0$$

e como a expressão do segundo parêntesis da desigualdade acima é positiva, temos que

$y - x > 0$, ou equivalentemente, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Proposição 2.4

Sejam $a \in R_+^* - \{1\}$, $p, q \in Q$, *onde* $p = \frac{r}{s}$, $q = \frac{m}{n}$, $r, s, m, n \in Z$, $n > 0$, $s > 0$

i) Se $p < q$ *e* $a > 1$ então $a^p < a^q$.

ii) Se $p < q$ *e* $0 < a < 1$ *então* $a^p > a^q$.

D]

i) Sendo k = m.m.c { n, s }, existem r', s' ∈ Z tais que

$$p = \frac{r'}{k} \ \ e \ \ q = \frac{m'}{k}$$

$$p < q \Rightarrow \frac{r'}{k} < \frac{m'}{k} \Rightarrow r' < m' \Rightarrow a^{r'} < a^{m'} \Rightarrow \sqrt[k]{a^{r'}} < \sqrt[k]{a^{m'}} \Rightarrow$$

$$a^{\frac{r'}{k}} < a^{\frac{m'}{k}} \Rightarrow a^p < a^q$$

ii) Análogo ao item i)

2.3. POTÊNCIAS COM EXPOENTES IRRACIONAIS

De posse da definição e das propriedades das potências com expoente racional de um número real $a > 0$, nosso objetivo agora e estender a definição de a^x para $x \in R$, ou seja, estabelecer o significado de a^x quando $x \in R - Q$.

Como definir, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ **?**

Sendo $\sqrt{2}$ um número irracional, $2^{\sqrt{2}}$ não tem significado se considerarmos apenas as definições vistas até aqui. O desenvolvimento sistemático da teoria das potências com expoente irracional é um processo que envolve resultados avançados para os nossos propósitos. Entretanto, é possível estender de maneira intuitiva o significado dessas potências. Por exemplo, tomando-se a sequência de valores racionais

$$(1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421; \ldots) \qquad (I)$$

que se aproxima do irracional $\sqrt{2}$, construímos a sequência

$$\left(2^{1,4};\ 2^{1,41};\ 2^{1,414};\ 2^{1,4142};\ 2^{1,41421};\ \ldots \right) \qquad (II)$$

que se aproxima de um número real que definimos como $2^{\sqrt{2}}$.

Tanto mais próximo o número r estiver de $\sqrt{2}$, mais próximo 2^r estará de $2^{\sqrt{2}}$.

Observemos que a sequência (I) é crescente e formada por valores maiores que $\sqrt{2}$.

Poderíamos também nos aproximar de $\sqrt{2}$ pela sequência

$$(1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots) \qquad (III)$$

que é decrescente e formada por valores maiores que $\sqrt{2}$, obtendo assim a sequência

$$\left(2^{1,5};\ 2^{1,42};\ 2^{1,415};\ 2^{1,4143},\ \ldots \right) \qquad (IV)$$

que se aproxima do mesmo número real chamado de $2^{\sqrt{2}}$.

O procedimento descrito acima pode ser utilizado para definir a^x, onde $a \in R_+^* - \{1\}$ e $x \in R - Q$.

Para isso, suponhamos, por exemplo, $a > 1$, $x \in R - Q$ e consideremos duas sequências de números racionais: uma crescente formada por números menores que x:

$$\left(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n, \ldots \right)$$

e outra decrescente formada por números maiores que x:

$$\left(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots,\ s_n, \ldots \right)$$

ambas se aproximando de x:

r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6..... x.... s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1

Pode-se provar que as duas sequências

$$\left(a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3},\ a^{r_4},\ \ldots \right)$$

e

$$\left(a^{s_1},\ a^{s_2},\ a^{s_3},\ a^{s_4},\ \ldots \right)$$

tendem a um único número real que definimos por a^x

Usando o mesmo procedimento definimos a^x para $0 < a < 1$.

Observações

1) Se x é um número irracional positivo então definimos $0^x = 0$.

2) Se x é um número irraconal definimos $1^x = 1$.

3) Se $a < 0$ e x é um número irracional ($x \in R - Q$), a potência a^x não está definida.

Todos os resultados vistos para potências com expoentes racionais são estendidos para potências com expoentes irracionais. Assumiremos válidos os seguintes resultados:

Propriedades

Sejam $a, b \in R_+^*$, $x, y \in$ **R.**

P$_1$**)** $a^x . a^y = a^{x+y}$

P$_2$**)** $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P$_3$**)** $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

P$_4$**)** $\left(a.b\right)^x = a^x b^x$

P$_5$**)** $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

P$_6$**)** $x < y$ e $a > 1 \Rightarrow a^x < a^y$

P$_7$**)** $x < y$ e $0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y$

P$_8$**)** $a \in R_+^*, a \neq 1$: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

P$_9$**)** $a \in R_+^*, a \neq 1$ e $y>0$: $\exists!\ t \in R \ / \ a^t = y$

2.4. EXERCÍCIOS

2.1. Calcule:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $(0,25)^{\frac{1}{4}}.(0,125)^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{32}$

c) $\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$

2.2 Supostas definidas, simplifique as seguintes expressões:

a) $x^3.x^{-1/2}.\frac{x^{3/2}}{x^2.x^{-3}}$

b) $(1+a^{1/3}).(1-a^{1/3}+a^{2/3})$

c) $(b^4-2b^2+1).\frac{b^{-2}}{b^2-b^{-2}}-1$

d) $\frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+1}+3^{n-1}}$

e) $\frac{2^{2n+1}-4^n}{2^{2n}}$

f) $\left(\frac{1}{1-x^{-0,5}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right).(x-1)$

g) $\left(\frac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}-1}+\frac{a^{1/2}-1}{a^{1/2}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}$

h) $\frac{x^{1/2}+1}{x+x^{1/2}+1}\div\frac{1}{x^{1,5}-1}$

2.3. Se $x^{1/2}+x^{-1/2}=3$, calcule:

a) $x+x^{-1}$

b) x^2+x^{-2}

2.4. Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt[3]{x+4}=2$

b) $\sqrt{x+2} = x$

c) $\sqrt[4]{x^2 + 4x + 3} = \sqrt[4]{x+1}$

d) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1}$

3. LOGARITMO. SISTEMA DE LOGARITMO

3.1. LOGARITMO

Agora que já "sabemos" o que é a^x, podemos formalizar a definição de logaritmo.

Definição

Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$. Chama-se *logaritmo de b na base a*, o expoente x que satisfaz a equação $a^x = b$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

x é o *logaritmo*

a é a *base*

b é o *logaritmando*

As restrições impostas à base a e ao logaritmando b decorrem das seguintes

Observações

1) $a \in \mathbb{R}_+^*$, para que a^x tenha significado $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $a \neq 1$, pois, caso contrário, $\log_a b$ só teria significado para $b = 1$.

3) $b \in \mathbb{R}_+^*$ pois, como $a > 0$, temos que $a^x > 0$.

Proposição 3.1.

Se a, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, existe um único número real x tal que $x = log_a b$.

D] Segue imediatamente da Propriedade P_9), considerando que

$$\boldsymbol{log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Exemplo

Calcule $\log_{0,25} 32$

Solução:

$$\log_{0,25} 32 = x \Leftrightarrow (0{,}25)^x = 32 \Leftrightarrow (0{,}25)^x = 2^5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow$$

$$-2x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \therefore log_{0,25} 32 = -\frac{5}{2}$$

Como consequências imediatas da definição de logaritmo temos que se a, b $c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

1) $\boldsymbol{log_a 1 = 0}$

D] $log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\boldsymbol{log_a a = 1}$

D] $log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$

3) $\boldsymbol{log_a a^{\alpha} = \alpha}$

D] $log_a a^{\alpha} = x \Leftrightarrow a^x = a^{\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha$

4) $\boldsymbol{a^{log_a b} = b}$

D] $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

5) $\boldsymbol{log_a b = log_a c \Rightarrow b = c}$

D] $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (III)

$log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c$ (IV)

De (III) e (IV) concluímos que $b = c$.

Sejam $a, b, c, \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e α e $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Temos as seguintes propriedades

$\boldsymbol{P_1)}$ $\boldsymbol{log_a (bc) = log_a b + log_a c}$

D] Consideremos que

$$log_a (bc) = x \Leftrightarrow a^x = bc$$

$$log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

$$log_a c = z \Leftrightarrow a^z = c$$

Então,

$$a^x = bc = a^y a^z = a^{y+z} \Rightarrow a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$$

P_2) $\boldsymbol{log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c}$

Consideremos,

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x \Leftrightarrow a^x = \frac{b}{c}'$$

$$log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

$$log_a c = z \Leftrightarrow a^z = c$$

Então,

$$a^x = \frac{b}{c} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z} \Rightarrow a^x = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z$$

Temos o seguinte caso particular:

$$\boldsymbol{log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\,log_a b}$$

D] $log_a\left(\frac{1}{b}\right) = log_a 1 - log_a b = -\,log_a b$

$P_3)$ $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$

D] Consideremos,

$$\log_a b^{\alpha} = x \Leftrightarrow a^x = b^{\alpha} \quad \text{e}$$

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

Então,

$$a^x = b^{\alpha} = \left(a^y\right)^{\alpha} = a^{y\alpha} \Rightarrow a^x = a^{y\alpha} \Rightarrow x = y\alpha .$$

Caso particular:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

D] $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$

$P_4)$ $\log_{a^{\beta}} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$

D] Consideremos,

$$\log_{a^{\beta}} (b) = x \Leftrightarrow \left(a^{\beta}\right)^x = b \Leftrightarrow a^{\beta x} = b \qquad \text{e}$$

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b$$

Então,

$$a^{\beta x} = b = a^y \Rightarrow \beta x = y \Rightarrow x = \frac{1}{\beta} y$$

Casos particulares:

i) $\log_{a^{-1}} (b) = -\log_a b$

ii) $\boldsymbol{log_{\sqrt[n]{a}} b = n \, log_a b}$

D]

i) $log_{a^{-1}}(b) = -\frac{1}{1} log_a b = - log_a b$

ii) $log_{\sqrt[n]{a}} b = \; log_{a^{1/n}}(b) = \frac{1}{1/n} log_a b = n \, log_a \mathrm{b}$

Exemplo

Aplicando as propriedades de logaritmos, desenvolva $\log_3\left(\frac{a^2\sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}}\right)$, supondo que a, b e c são números reais positivos.

Solução:

$$\log_3\left(\frac{a^2\sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}}\right) = \log_3\left(a^2\sqrt{bc}\right) - \log_3\sqrt[5]{(a+b)^3} = \log_3 a^2 + \log_3\sqrt{bc} - \log_3(a+b)^{3/5} =$$

$$= 2\log_3 a + \frac{1}{2}\log_3(bc) - \frac{3}{5}\log_3(a+b) =$$

$$= 2\log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 b + \frac{1}{2}\log_3 c - \frac{3}{5}\log_3(a+b)$$

3.2. SISTEMAS DE LOGARITMOS DE BASE a. MUDANÇA DE BASE.

Chamamos de *sistema de logaritmos de base a*, o conjunto de todos os logaritmos na base a ($a > 0$ e $a \neq 1$).

Quando trabalhamos com logaritmos podemos utilizar qualquer base a, $a > 0$ e $a \neq 1$. Naturalmente não precisamos construir tabelas dos valores dos logaritmos para todos os sistemas. Conhecendo-se bem um sistema, podemos a partir da tabela obter o valor do logaritmo de um número em qualquer base. Para isto, precisamos de uma fórmula que relacione logaritmos de bases diferentes. A fórmula é a seguinte:

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$

É válida se $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}_+^*$, $\boldsymbol{a \neq 1}$ e $\boldsymbol{c \neq 1}$.

De fato, considerando

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \text{e}$$

$$log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$$

temos que $a^x = c^y$. Assim,

$$log_c\left(a^x\right) = log_c\left(c^y\right) \Rightarrow x\, log_c a = y\, log_c c = y$$

Como $a \neq 1$, segue-se que $log_c a \neq 0$ e, portanto,

$$x = \frac{y}{log_c a} \Rightarrow log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

A fórmula $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a}$ nos diz que <u>logaritmos em diferentes bases diferem por uma constante</u>.

Consequências:

$$\boldsymbol{log_a b . log_c a = log_c b}$$

D] Segue imediatamente da propriedade dada acima.

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{1}{log_b a}}$$

D] $log_a b = \dfrac{log_b b}{log_b a} = \dfrac{1}{log_b a}$

Exemplos

1) Se a, b e c são números reais positivos, $a \neq 1$ e $ac \neq 1$, então

$$\boldsymbol{log_a b = (log_{ac} b)(1 + log_a c)}$$

D] $(log_{ac} b)(1 + log_a c) \ = \ \dfrac{log_a b}{log_a ac}(1 + log_a c) \ = \ \dfrac{log_a b}{log_a a + log_a c}(1 + log_a c) \ =$

$$= \ \frac{log_a b}{1 + log_a c}(1 + log_a c) \ = \ log_a b$$

2) Se a, b e c são reais positivos com $c \neq 1$, então

$$\boldsymbol{a^{log_c b} = b^{log_c a}}.$$

D] Sejam $x \ = \ a^{log_c b}$ e $y \ = \ b^{log_c a}$. Vamos mostrar que $x = y$.

$$log_c x = log_c\left(a^{log_c b}\right) = log_c b . log_c a \qquad (\text{ V })$$

$$log_c y = log_c\left(b^{log_c a}\right) = log_c a . log_c b \qquad (\text{ VI })$$

De (V) e (VI), temos que $log_c x = log_c y$ e, portanto, $x = y$.

3) Se a, b, c e d são reais positivos diferentes de 1 e $abc \neq 1$, então

$$\boldsymbol{log_a d \cdot log_b d + log_b d \cdot log_c d + log_c d \cdot log_a d = \frac{log_a d \cdot log_b d \cdot log_c d}{log_{abc} d}}$$

D] Partindo do 2º membro da expressão, chegaremos ao 1º membro. Vejamos:

$$\frac{log_a d.log_b d.log_c d}{log_{abc} d} = log_a d.log_b d.log_c d\, log_d abc =$$
$$= log_a d.log_b d.log_c d\left(log_d a + log_d b + log_d c\right) =$$
$$= log_b d.log_c d + log_a d.log_c d + log_a d.log_b d.$$

Dentre a infinidade de valores que pode assumir a base, e portanto dentre a infinidade de sistemas de logaritmos, dois se destacam por suas aplicações práticas: o sistema de logaritmos decimais e o sistema de logaritmos neperianos.

O SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS

A preferência pelos logaritmos decimais nos cálculos se deve, evidentemente de usarmos um sistema de numeração de base 10. Os logaritmos decimais também são chamados de logaritmos de Briggs, por ter sido o inglês Henry Briggs (1561-1631) quem primeiro utilizou o número 10 para a construção de tábuas de logaritmos. Briggs publicou sua primeira tábua em 1617; depois em versão bem mais ampliada, em 1624 (Arithmetica Logarithmica) que continha o logaritmo dos primeiros 20.000 inteiros e dos números entre 90.000 e 100.000 calculados com 14 casas decimais! O espaço deixado por Briggs entre 20.000 e 90.000 foi preenchido por Adrian Vlacq, um matemático holandês que publicou uma tábua dos logaritmos dos primeiros 100.000 números inteiros, ainda em 1624.

Embora os logaritmos decimais tenham perdido sua importância como instrumento de cálculo manual, eles ainda estão presentes em várias situações práticas. Vejamos exemplos em algumas áreas.

Química - O fator pH é um índice muito usado pelos químicos para medir a concentração de íons positivos numa solução.

Soluções	Concentração iônica
ácidas	10^{-2} a 10^{-7} moles por litro
básicas	10^{-7} a 10^{-12} moles por litro
neutra	10^{-7} moles por litro

Como esses números são muito pequenos, ou equivalentemente, têm denominadores muito grandes, seus logaritmos são mais adequados para caracterizar as concentrações. Isto é consequência do vagaroso crescimento dos logaritmos. Uma vez que os logaritmos são negativos (já que os números são menores que 1) prefere-se definir o pH como o oposto do logaritmo da concentração. Temos assim:

Soluções	pH
ácidas	< 7
neutra	7
básica	>7

Sismologia - Em sismologia, a medida da intensidade das ondas que emanam de um centro sísmico se faz com uma escala logarítmica decimal, chamada de "escala Richter". Como no caso do pH em Química, também aqui ocorrem números muito grandes nas medidas da energia liberada nos terremotos, sendo, pois preferível trabalhar com o logaritmo para construir a escala de medição da intensidade dos abalos.

Acústica - Também em Acústica os logaritmos decimais são usados na construção da escala decibel, que serve para medir a intensidade dos sons. As escalas são construídas com logaritmos decimais (poderia ser outra base) para que os números da escala não fiquem muito grandes.

É comum se utilizar a notação log b em lugar de $\log_{10}b$. Por terem sido bastante utilizados no passado, e ainda aparecerem em várias áreas do conhecimento, usa-se a notação abaixo para os logaritmos decimais:

Notação tradicional para os logaritmos decimais:

$$\log_{10} b = \log b$$

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

Trata-se de um sistema de logaritmos na base *e =2,718283...* Este número é um número irracional. O nome neperiano vem de John Napier, matemático escocês, considerado o criador dos logaritmos. Este sistema é também chamado de *sistema de logaritmos naturais*, pois no estudo dos fenômenos da natureza geralmente aparece uma lei exponencial de base *e*. Em geral usa-se a seguinte notação:

Notação tradicional para os logaritmos neperianos:
$\log_e b = \ln b$

No Capítulo 6 faremos um estudo mais detalhado sobre o número *e* e os logaritmos neperianos.

3.3. EXERCÍCIOS

3.1. Calcule:

a) $\log_{100}\sqrt[3]{10}$ b) $5^{(2-\log_5 2)}$ c) $4^{\log_2 3+\log_{16}3}$ d) $\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)$

3.2. Determine E nos seguintes casos:

a) $\log_3 E = 2 + \log_3 5 - \log_9 a - \log_{27} b$

b) $\log E = \dfrac{2\log(a-b) - 2\log(a+b) + 4\log b}{5}$

3.3. Sendo log 432 = p e log648 = q, calcule log6.

3.4. Sendo $\log(a - b) = m$ e $\log(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = n$, calcule $\log(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

3.5. Sendo $\log_a m = 2$, $\log_b m = 3$ e $\log_c m = 5$, calcule $\log_{abc} m$.

3.6. Para cada inteiro n, $n > 1$, mostre que: $-\log_n\left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right] = 3$

3.7. Mostre que se três números positivos estão em P.G. então seus logaritmos, numa base a, estão na ordem correspondente, em uma P.A. Se q é a razão da P.G. e r a razão da P.A., qual a relação entre q e r?

3.8. As raízes da equação $ax^2 - acx + b = 0$ são $x_1 = a\log_c a$ e $x_2 = b\log_c b$. Mostre que $a^a . b^b = c^c$

3.9. As raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ são log(a) e log(b). As raízes da equação $x^2 - 2Sx + P = 0$ são log(ab) e log(a/b). Calcule p e P em função de s e S.

3.10. Se $\log_a b = \log_b c$ e $\log_a c = \log_c x$, $x \neq 1$, mostre que $(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$
(Sugestão: Escreva as igualdades na base *x*)

3.11. Dada a equação $x^2 - px + B^m$ com raízes reais a e b, prove que:

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = \text{mp}$$

3.12. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa a, tais que $a - b \neq 1$ e $a + b \neq 1$. Mostre que

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2\log_{a+b} c \, . \, \log_{a-b} c$$

4. AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

4.1. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos no capítulo anterior que dado $a \in \mathrm{R}_+^*$, *a potência* a^x *pode ser definida para qualquer número* $x \in \mathrm{R}$. Portanto, *fixando* $a \in \mathrm{R}_+^*$, podemos definir uma função que a cada $x \in \mathrm{R}$ associa $a^x \in \mathrm{R}_+^*$. Esta função será chamada de função exponencial de base a .

Definição

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. Chama-se *função exponencial de base a*, a função

$$f : R \to R_+^*$$
$$x \to a^x$$

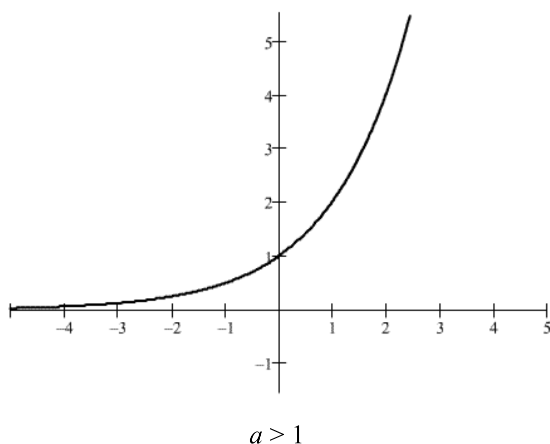
Observações

1) A exigência $a \neq 1$ é para que a função exponencial não seja uma função constante.

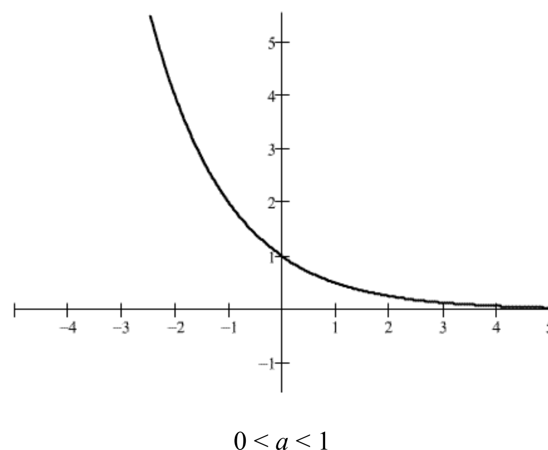
2) Segue da propriedade P_9), vista anteriormente para potências, que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{R}_+^*$, ou seja, f é sobrejetora.

3) Das propriedades P_6) e P_7), temos que a função exponencial é estritamente crescente para $a > 1$, e estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

Apresentamos a seguir o gráfico da função exponencial nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.



$a > 1$



$0 < a < 1$

Para o traçado desses gráficos, utilizamos os seguintes fatos:

1) Se $a > 1$, o gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x decresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é uma assíntota horizontal do gráfico de f e usamos a notação

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Quando x cresce indefinidamente , a^x também cresce indefinidamente e então

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

2) Se $0 < a < 1$, o gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x cresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f e usamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Quando x decresce indefinidamente, a^x cresce indefinidamente e então

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty .$$

3) Em ambos os caso, o gráfico de f passa pelo ponto (0,1).

Proposição 4.1

Seja a $\in \mathrm{R}_+^*$, com $a \neq 1$. A função $\begin{array}{l} f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{array}$ é injetora

D] Isso é consequência do seguinte fato: toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetora.

De fato, suponhamos que f seja estritamente crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

Temos então,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ ou } f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) .$$

O caso em que f é estritamente decrescente demonstra-se de modo análogo.

Como a função exponencial é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$, concluímos que ela é injetora.

Sendo injetora e sobrejetora, temos que a função exponencial, como definida acima, é bijetora.

Proposição 4.2

Sejam $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$ e x_1 e $x_2 \in \mathrm{R}$.

i) Se $a > 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 < x_2$.

ii) Se $0 < a < 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 > x_2$.

D]

i) Suponhamos, por absurdo, que $x_1 \geq x_2$. Como $a > 1$, a função exponencial é crescente, logo $a^{x_1} \geq a^{x_2}$, o que contradiz a hipótese.

ii) Análogo ao item i).

Da Proposição 4.2. e das observações feitas anteriormente sobre o crescimento e decrescimento da função exponencial, concluímos:

i) Para $a > 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

4.2. A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Trabalhamos anteriormente com a parte operacional dos logaritmos. Aprendemos que, fixado como base um número real a, positivo e diferente de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$), temos que para cada número real número real x positivo, o número $log_a x$ existe e é único. Estas condições de existência e unicidade nos dão a possibilidade de tratar os logaritmos, assim como fizemos com os expoentes, sob o ponto de vista da teoria das funções, pois a idéia básica na definição de função é que a cada elemento x de um conjunto A se faça corresponder um único elemento y de um conjunto B.

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Chama-se *função logaritmica de base* a, a função

$$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \to log_a x$$

Proposição 4.3

Seja g: $\mathbb{R}_{+}^{*} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, com $a \neq 1$. Temos
$x \to log_a x$

i) Se $a > 1$ então g é estritamente crescente.

ii) Se $0 < a < 1$ então g é estritamente decrescente .

D]

i) Sejam $a > 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e suponhamos que $x_1 < x_2$

Consideremos que

$$y_1 = log_a x_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = log_a x_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2$$

De $x_1 < x_2$ temos que $a^{y_1} < a^{y_2}$. Como $a > 1$, como consequência da Proposição 4.2, segue-se que $y_1 < y_2$, ou seja, $log_a x_1 < log_a x_2$.

ii) A demonstração é análoga ao caso i)

Proposição 4.4

Seja g: $\mathbb{R}_{+}^{*} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, com $a \neq 1$. Se x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, então:
$x \to log_a x$

i) Para $a > 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$.

D]

i) Consideremos que

$$y_1 = log_a x_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = log_a x_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2 .$$

Suponhamos que $log_a x_1 < log_a x_2$, isto é, $y_1 < y_2$. Como a função exponencial de base $a > 1$ é estritamente crescente, temos que $a^{y_1} < a^{y_2}$, ou seja, $x_1 < x_2$.

ii) A demonstração é análoga.

Das proposições anteriores temos as equivalências

i) Para $a > 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ii) Para $0 < a < 1$, $log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Proposição 4.5

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função $g: \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R}$, é bijetora.
$x \to log_a x$

D]

A injetividade segue do fato da função ser estritamente crescente para $a > 1$ ou, estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

A função é sobrejetora pois, dado $y \in \mathrm{R}$, existe $x \in \mathrm{R}_+^*$, tal que $x = a^y$, o que é equivalente a $y = log_a x$.

Proposição 4.6

Seja $a \in \mathrm{R}_+^*$, $a \neq 1$. Consideremos as funções

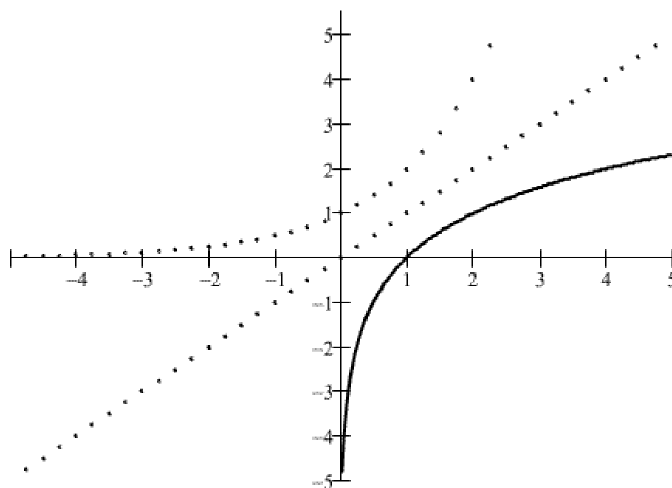
$$\text{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+^*, \quad x \to a^x \qquad\qquad \text{g}: \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R}, \quad x \to log_a x$$

Então $\text{f o g}(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{R}_+^*$, $\text{g o f}(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{R}$, ou seja, $\text{f} = \text{g}^{-1}$ e $\text{g} = \text{f}^{-1}$.

D] As funções f e g são bijetoras, logo admitem inversas. Além disso,

$$g(f(x)) = log_a a^x = x, \quad \forall x \in R \qquad e \qquad f(g(x) = a^{log_a x} = x, \quad \forall x \in R_+^*$$

O fato da função logarítmica ser a inversa da exponencial nos permite construir o seu gráfico usando a simetria em relação à 1ª bissetriz.



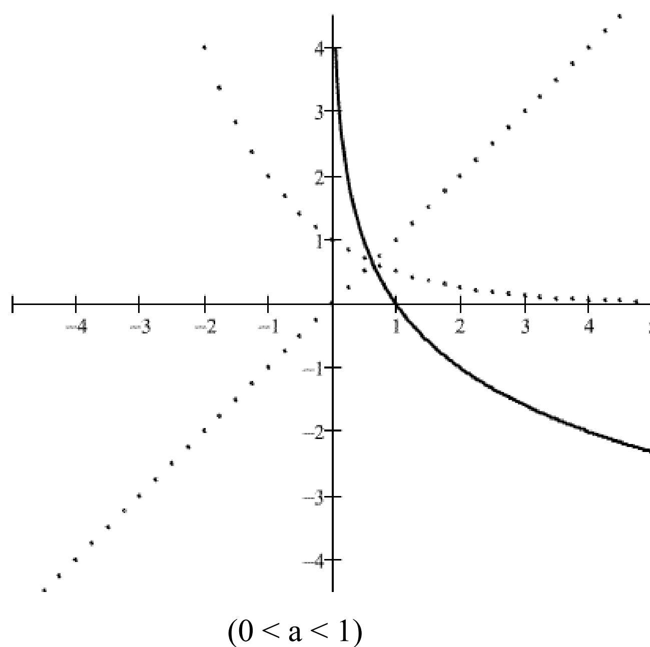
$(a > 1)$

Observando o gráfico anterior concluímos:

1) O gráfico passa pelo ponto (1,0).

2) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3) O eixo Oy (x = 0) é assíntota do gráfico de g.



(0 < a < 1)

Neste caso temos:

1) O gráfico passa pelo ponto (1,0).

2) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

3) O eixo Oy (x = 0) é assíntota do gráfico de g.

Trabalharemos a seguir com exemplos de funções obtidas a partir de funções logarítmicas, aplicando-se operações com funções, tais como, composição, soma, multiplicação, etc.

Exemplos

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$

Solução:

Como o domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos temos que

$x^2 - 1 > 0$. Assim, D(f) =]–∞, –1[∪]1, +∞[.

b) $f(x) = \log_{x-1}\left(2x - x^2\right)$

Solução:

Neste caso as seguintes condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

i) $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(2 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

ii) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

iii) $x - 1 \neq \Leftrightarrow x \neq 2$

De i), ii) e iii), concluímos que D(f) =]1,2[.

c) $f(x) = \log_3\left(2^x - 4\right)$

Solução:

Temos que,

$$2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$$

Assim, D(f) =]2, + ∞[.

d) $f(x) = \log\left(2^x + 4\right)$

Solução:

Neste caso, como $2^x + 4 > 0, \ \forall x \in R$, temos que D(f) = R

2) Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando o domínio, a imagem e assíntota vertical.

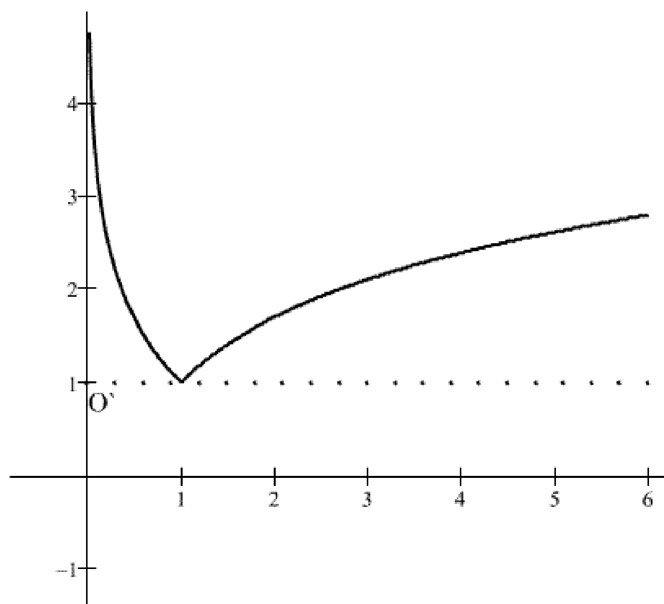
a) $f(x) = 1 + |\ln x|$

Solução:

Temos

$$y = 1 + |\ln x| \Leftrightarrow y - 1 = |\ln x|$$

Fazendo $y - 1 = y'$ e $x = x'$ transladamos os eixos coordenados para a nova origem O'(0,1) e construímos no novo sistema o gráfico de $y' = |\ln x'|$.



D(f) = R_+^*, Im(f) = [1, +∞[.

A reta x = 0 é assíntota vertical.

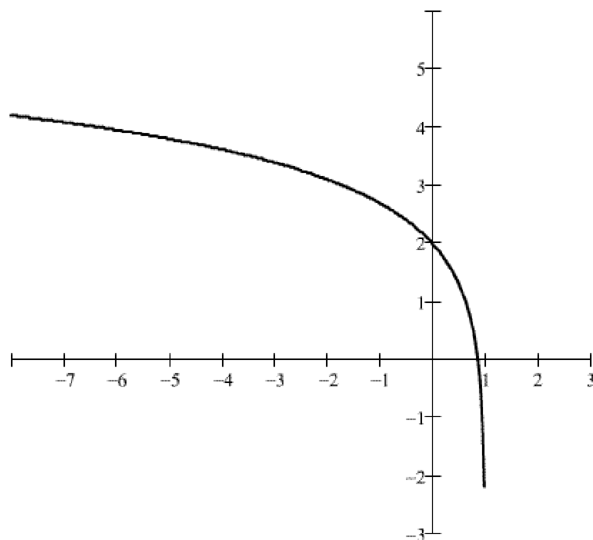
b) $f(x) = 2 + \ln(1 - x)$

Solução:

Temos que

$$y - 2 = \ln(1 - x) = \ln(-(x - 1))$$

Fazendo y – 2 = y' e x – 1 = x', transladamos os eixos coordenados para a nova origem, O'(1,2) e construímos no novo sistema o gráfico de y'= ln(–x')



D(f) =]–∞,1[, Im(f) = R.

x = 1 é assíntota vertical.

c) $f^{-1}(x)$, sendo $f(x) = 1 + e^{x+2}$

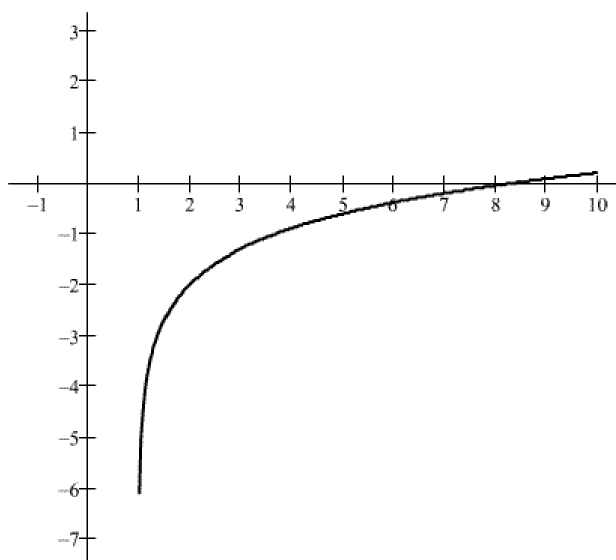
Solução:

Vamos determinar, inicialmente, $f^{-1}(x)$:

$$y = 1 + e^{x+2} \Leftrightarrow y - 1 = e^{x+2} \Leftrightarrow \ln(y-1) = x + 2 \Leftrightarrow x = \ln(y-1) - 2 .$$

Temos assim que $f^{-1}(x) = \ln(x-1) - 2$.

Fazendo y + 2 = y' e x – 1 = x', construímos o gráfico da função y'= lnx'no novo sistema cuja origem é O'(1, –2).



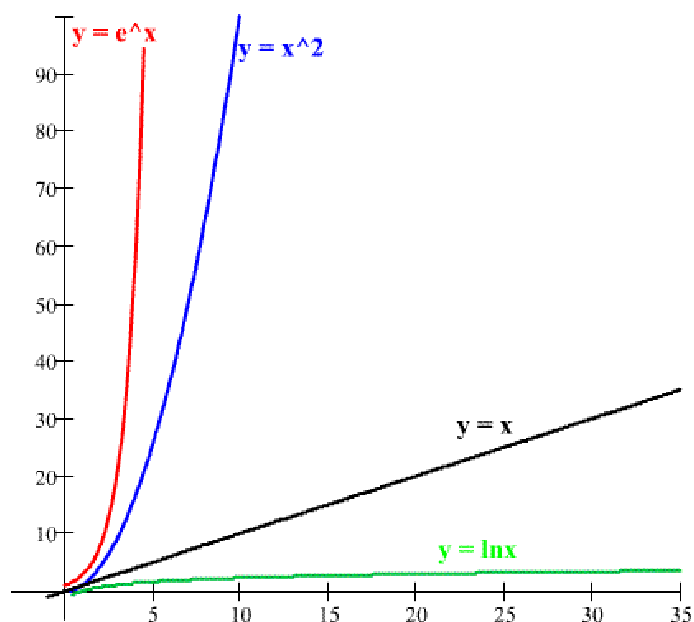
D(f) =]1, + ∞[, Im(f) = R

x = 1 é assíntota vertical

4.3. ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

O rápido crescimento da exponencial e a vagarosidade dos logaritmos

Uma propriedade importante da exponencial de base maior que 1 é o seu rápido crescimento com o crescer de x. Infelizmente, essa propriedade nem sempre é devidamente enfatizada no ensino do 2º grau, talvez porque o ensino do logaritmo continue sendo feito como se ele fosse apenas um instrumento de cálculo à moda antiga sem maiores preocupações com o aspecto funcional do logaritmo e da exponencial. A seguinte tabela ilustra este fato, onde comparamos o crescimento de x^2 com o de e^x ($e \cong 2,7$) com valores arredondados.



x	$y = x^2$	$y = e^x$
0	0	1 cm
3	9	20 cm
5	25	148 cm
10	100	220 cm
15	225	33 km
20	400	4.852 km
30,3357	920	Distância da Terra ao Sol
41,39	1.713	1 ano-luz
42,85	1.836	4,3 anos-luz
...	...	...

(Distância da Terra ao sol = 149.500.000)

(1 ano-luz = 946.728 x 10^7 km)

(4,3 anos-luz = 407.093 x 10^8 = distância da estrela mais próxima do Sol)

Estes poucos cálculos mostram claramente o quão rapidamente cresce a função exponencial com o crescer do seu argumento.

Em correspondência ao rápido crescimento da exponencial está o vagaroso crescimento da função logarítmica. Assim, se a 3ª coluna da tabela representar y temos que a nossa 1ª coluna representa o logaritmo na base *e* de y. Para conseguirmos subir 5cm na vertical das ordenadas é preciso fazer y = 148cm. Para subir 10cm é preciso andar 220m na horizontal.

4.4. EXERCÍCIOS

4.1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 3^{x+1}$; b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; c) $f(x) = -2^{-x}$; d) $f(x) = e^{-|x|}$

4.2. Mostre que a função $f(x) = \left(m^2 - 2m + 3\right)^x$ é crescente para qualquer $m \in R$.

4.3. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{-(2^{2x+1} - 5 .2^x + 2)}$ b) $f(x) = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_5(3-x)}$

c) $f(x) = \log_{(3x-4)}(x^2 - 9)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3^{-2x} - 8.3^{-x} + 15}}$

4.4. Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo, indicando o domínio e a imagem de f^{-1}.

a) $f(x) = 2 + \log_5 x$ b) $f(x) = 3^{2x+3}$

c) $f(x) = \log_x 10$ d) $f(x) = 5^x - 2.5^{-x}$ (Use o fato que $x < \sqrt{x^2 + 8}$, $\forall x \in R$)

4.5.Esboce o gráfico das funções definidas pelas seguintes sentenças:

a) $f(x) = 1 + \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2}(x-2)$

c) $f(x) = -|\log_2 x|$ d) $f(x) = \log_{1/2}|x|$

e) $f(x) = |\log_2 |x||$ f) $f(x) = 1 + |\log_{1/2}(x-1)|$

4.6. Mostre que se $a,b \in R_+^*$ e $x \in R^*$ então $a^x = b^x \Rightarrow a = b$.Esta propriedade é válida em geral?

5. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

5.1. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são chamadas de *equações exponenciais*. Por exemplo,

$$2^x = \frac{1}{16}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25; \quad 4^x - 2^x - 2 = 0$$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de equações com a respectiva solução. Na maioria dos casos a aplicação das propriedades de potências reduz as equações a uma igualdade de potências da mesma base

$$a^x = a^\alpha$$

o que, usando o fato que a função exponencial é injetora, nos permite concluir

$$a^x = a^\alpha \Rightarrow x = \alpha \quad , \, a \in R_+^* - \{1\}$$

e portanto, resolver a equação.

Exemplos

1) Resolver as seguintes equações exponenciais

a) $2^x = 16$

Solução:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$\therefore \; S = \{ 4 \} .$$

b) $(100)^{x} = 0{,}001$

Solução:

$$(100)^{x} = 0{,}001 \Rightarrow (10)^{2x} = (10)^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore\ S = \{ -\frac{3}{2} \}.$$

c) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

Solução:

$$5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480 \Rightarrow 5^{4x}\left(5^{-1} - 1 - 5 + 5^{2}\right) = 480 \Rightarrow 5^{4x}(\frac{96}{5}) = 480 \Rightarrow$$

$$5^{4x} = 25 \Rightarrow 5^{4x} = 5^{2} \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S = \{ \frac{1}{2} \}.$$

d) $9^{x} + 3^{x+1} = 4$

Solução:

$$9^{x} + 3^{x+1} = 4 \Rightarrow 3^{2x} + 3.3^{x} - 4 = 0$$

Fazendo $y = 3^{x}$,temos:

$$y^{2} + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

Observemos que y = –4 não satisfaz porque $y = 3^{x} > 0$.

De y = 1, temos:

$$3^{x} = 1 = 3^{0} \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore\ S = \{0\}.$$

e) $5.(2)^x = 4^x$.

Solução:

$$5.(2)^x = 4^x. \Rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^x = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5$$

$$\therefore \; S = \{\log_2 5\}$$

2) Resolver em R_+ as equações:

a) $x^{x^2-2} = 1$

Solução:

Inicialmente vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da equação. Como não se define 0^{-2}, x = 0 não é solução da equação.

Fazendo x = 1 na equação obtemos $1^{-1} = 1$ o que é uma identidade e portanto, x = 1 é solução. Supondo x > 0 e x $\neq$ 1, podemos usar a injetividade da função exponencial

$$x^{x^2-2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \; S = \{1, \sqrt{2}\}.$$

b) $x^{4-2x} = x$

Solução:

Examinemos inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação

$$0^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$

$$1^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é solução}$$

Supondo x > 0 e x $\neq$ 1 temos

$$x^{4-2x} = x \Rightarrow 4 - 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \ S = \{0, 1, \frac{3}{2}\}$$

5.2. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

As equações envolvendo logaritmos são chamadas de *equações logarítmicas* e são resolvidas aplicando-se propriedades dos logaritmos e o fato da função logarítmica ser injetora. Assim, procuramos escrever todos os logaritmos envolvidos numa mesma base e usamos a condição

$$\boldsymbol{\log_a x = \log_a \alpha \Rightarrow x = \alpha}$$

Além disto, devemos inicialmente analisar as condições de existência dos logaritmos, levando-se em conta os domínios de definição do logaritmo e da base.

Exemplos

Resolva as seguintes equações:

1) $\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x$

Solução:

Condições de existência:

$$x + 2 > 0 \ \text{ e } \ x > 0 \Rightarrow x > 0 \qquad \text{(I)}$$

Temos

$$\log_3(x+2) = 1 + \log_{1/3} x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3 3 - \log_3 x \Rightarrow \log_3(x+2) = \log_3\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow$$

$$x + 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \ \text{ ou } \ x = 1 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é:

$$S = \{ 1 \}$$

2) $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_{3x} 9} = 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0 \ \text{ e } 3x \neq 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{3} \qquad (\text{ I })$$

Temos

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_{3x} 9} = 2 \Rightarrow \log_3 x + \log_9 3x = 2 \Rightarrow \log_3 x + \frac{\log_3 3x}{\log_3 9} = \log_3 3^2 \Rightarrow$$

$$\log_3 x + \frac{\log_3 3x}{2} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 \sqrt{3x} = \log_3 9 \Rightarrow \log_3\left(x\sqrt{3x}\right) = \log_3 9 \Rightarrow$$

$$x\sqrt{3x} = 9 \Rightarrow \left(x\sqrt{3x}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é S = { 3 }.

3) $x^{\log_2 x} = 4x$

Solução:

Condição de existência: $x > 0$ (I)

$$x^{\log_2 x} = 4x \Rightarrow \log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2(4x) \Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) = \log_2 4 + \log_2 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_2 x = y$, obtemos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \ \text{ou}\ y = -1 \Rightarrow \log_2 x = 2 \ \text{ou}\ \log_2 x = -1 \Rightarrow$$

$$x = 4 \ \text{ou}\ x = \frac{1}{2}.$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ \frac{1}{2}, 4 \}$.

4) $(x)^{\log_x (x+3)} = 7$

Solução:

Condições de existência:

$$x > 0,\ x \neq 1 \text{ e } x > -3 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1 \qquad (\text{ I })$$

Temos

$$(x)^{\log_x (x+3)} = 7 \Rightarrow x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) temos que a solução da equação é: $S = \{ 4 \}$.

5) $\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right)$

Solução:

Condições de existência: como $9^{x-2} + 7 > 0$ e $3^{x-2} + 1 > 0 \ \ \forall\, x \in R$, concluímos que a equação está definida para todo número real x.

Vejamos:

$$\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right) \Rightarrow \log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = \log_2 4 + \log_2\left(3^{x-2} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\log_2\left(9^{x-2} + 7\right) = \log_2\left(4\left(3^{x-2} + 1\right)\right) \Rightarrow 9^{x-2} + 7 = 4.3^{x-2} + 4 \Rightarrow$$

$$3^{2x}.3^{-4} + 7 = 4.3^{x}.3^{-2} + 4.$$

Fazendo $3^x = y$ obtemos a equação $y^2 - 36y + 243 = 0$, que tem como solução $y = 9$ ou $y = 27$.

Portanto,

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

$$3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

Assim, a solução da equação é: S = { 2, 3 }.

5.3. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Inequações que envolvem termos em que a incógnita aparece no expoente são *inequações exponenciais*. Por exemplos

$$5^x > 20;\ 3^{-x} < \frac{1}{81};\ 4^x - 6.2^x + 8 < 0.$$

Assim como no caso das equações exponenciais, em geral, as inequações podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base, através da aplicação das propriedades de potências. Usamos então a Proposição 4.2:

i) Se $a > 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 < x_2$

ii) Se $0 < a < 1$ e $a^{x_1} < a^{x_2}$ então $x_1 > x_2$

Em outros casos a inequação é resolvida com a aplicação dos logaritmos.

Exemplos

1) Resolver as seguintes inequações exponenciais:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \frac{1}{81}$

Solução:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{4}$$

Como a base é menor que 1, temos que x < 4.

$$\therefore\ S =]-\infty, 4[\ .$$

b) $4^{x} - 6.2^{x} + 8 < 0$

Solução:

$$4^{x} - 6.2^{x} + 8 < 0 \Rightarrow \left(2^{x}\right)^{2} - 6.2^{x} + 8 < 0$$

Fazendo, $2^{x} = y$, temos

$$y^{2} - 6y + 8 < 0 \Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow 2 < 2^{x} < 2^{2}$$

Como a base é maior que 1, então $1 < x < 2$

$$\therefore\ S\ =\ ]1,2[$$

c) $3^{x} < 5$

Solução:

Aplicando logaritmo na base 3 nos dois lados da desigualdade e conservando o sinal da desigualdade uma vez que a base do logaritmo é maior que 1 temos

$$3^{x} < 5 \Rightarrow \log_{3}\left(3^{x}\right) < \log_{3}5 \Rightarrow x < \log_{3}5$$

$$\therefore\ S\ =\ ]-\infty, \log_{3}5[$$

2) Resolver em R_+ a inequação $x^{4x-3} < 1$

Solução:

Devemos considerar três casos:

i) Vamos verificar se 0 ou 1 são soluções da inequação.

Como 0^{-3} não está definido, x = 0 não é solução da inequação.

Se $x = 1$, temos $1^x < 1$ o que não se verifica, logo $x = 1$ não é solução. A solução neste caso é $S_1 = \varnothing$.

ii) $x > 1$ (I)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{4} \qquad \text{(II)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (I) e (II), portanto a solução $S_2 = \varnothing$.

iii) $0 < x < 1$ (III)

$$x^{4x-3} < 1 \Rightarrow x^{4x-3} < x^0 \Rightarrow 4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4} \qquad \text{(I V)}$$

A solução neste caso deve satisfazer simultaneamente (III) e (IV), portanto $S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

A solução da inequação é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]\frac{3}{4}, 1[$.

5.4. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para resolvermos inequações envolvendo logaritmos, procuramos colocar os logaritmos numa mesma base, usando as propriedades, analisamos as condições de existência e usamos as implicações

i) Para $a > 1,\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$

ii) Para $0 < a < 1,\ \log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$

Exemplos

Resolva as seguintes inequações logaritmicas:

1) $\log_{1/2}\left(x^2 - x - 3/4\right) > 2 - \log_2 5$

Solução:

Condição de existência:

$$x^2 - x - 3/4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1/2[\ \cup\ ]3/2,+\infty[\qquad (\text{ I })$$

Temos,

$$\log_{1/2}\left(x^2 - x - 3/4\right) > 2 - \log_2 5 \Rightarrow -\log_2\left(x^2 - x - 3/4\right) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2\left(x^2 - x - 3/4\right) < \log_2(5/4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 3/4 < 5/4 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x \in]-1,2[\qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S =]-1,-\frac{1}{2}[\ \cup\ ]\frac{3}{2},2[\,.$$

2) $\log_5(x-2) + \dfrac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x - 2 > 0 \text{ e } x - 3 > 0 \text{ e } x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow x > 3 \text{ e } x \neq 4 \qquad (\text{ I })$$

Consideremos

$$\log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5} > \log_5 2 \Rightarrow \log_5(x-2)+\log_5(x-3) > \log_5 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5(x-2)(x-3) > \log_5 2 \Rightarrow (x-2)(x-3) > 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty,1[\quad \cup \quad]4,+\infty[\qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S = \ ]4,+\infty[\, .$$

3) $|2+\log_2 x| \geq 3$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Vejamos:

$$|2+\log_2 x| \geq 3 \Rightarrow 2+\log_2 x \geq 3 \text{ ou } 2+\log_2 x \leq -3 \Rightarrow \log_2 x \geq 1 \text{ ou } \log_2 x \leq -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 2 \quad \text{ou} \quad \log_2 x \leq \log_2 2^{-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \text{ ou } x \leq 2^{-5} \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S = \ ]0,2^{-5}[\quad \cup \quad [2,+\infty[\, .$$

4) $x^{(\log_3 x)} \leq 9x$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Temos

$$x^{(\log_3 x)} \le 9x \Rightarrow \log_3\left(x^{(\log_3 x)}\right) \le \log_3(9x) \Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x) \le \log_3 9 + \log_3 x \Rightarrow$$

Fazendo $\log_3 x = y$, obtemos

$$y^2 - y - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le y \le 2 \Rightarrow \log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le \log_3 9 \Rightarrow \Rightarrow 3^{-1} \le x \le 9 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é

$$S = [\frac{1}{3}, 9].$$

5) $x^{\log x + 1} > 100x$

Solução:

Condição de existência:

$$x > 0 \qquad (\text{ I })$$

Assim

$$x^{\log x + 1} > 100x \Rightarrow x^{\log x}.x > 100x \Rightarrow x^{\log x} > 100 \Rightarrow \log\left(x^{\log x}\right) > \log 100 \Rightarrow$$

$$(\log x)^2 > 2 \Rightarrow \log x > \sqrt{2} \text{ ou } \log x < -\sqrt{2} \Rightarrow x > 10^{\sqrt{2}} \text{ ou } x < 10^{-\sqrt{2}} \qquad (\text{ II })$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]0, 10^{-\sqrt{2}}[\quad \cup \quad]10^{\sqrt{2}}, +\infty[.$$

4) $\log_2(x-1) \le \log_{(x-1)} 2$

Solução:

Condições de existência:

$$x - 1 > 0 \text{ e } x - 1 \ne 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \text{ e } x \ne 2 \qquad (\text{ I })$$

Assim,

$$\log_2(x-1) \le \log_{(x-1)} 2 \Rightarrow \log_2(x-1) \le \frac{1}{\log_2(x-1)}$$

Fazendo $\log_2(x-1) = y$, obtemos

$$y \le \frac{1}{y} \Rightarrow y - \frac{1}{y} \le 0 \Rightarrow \frac{y^2-1}{y} \le 0 \Rightarrow y \le -1 \text{ ou } 0 < y \le 1 \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \le -1 \quad \text{ou} \quad 0 < \log_2(x-1) \le 1 \quad \Rightarrow$$

$$\log_2(x-1) \le \log_2 2^{-1} \quad \text{ou} \quad \log_2 1 < \log_2(x-1) \le \log_2 2 \quad \Rightarrow$$

$$x - 1 \le \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 1 < x-1 \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \le \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad 2 < x \le 3 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) concluímos que a solução da inequação é:

$$S =]1, \frac{3}{2}] \cup]2,3]$$

5.5. EXERCÍCIOS

5.1. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x^2-x-16} = 16$

b) $2^{3x+2} \div 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

c) $3.\ 2^x - 5.\ 2^{x+1} + 5.2^{x+3} - 2^{x+5} = 2$

d) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

e) $3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4.\ 3^{1-3x}$

f) $x^{x^2-2} = 1$ (em IR_+)

g) $x^{4-2x} = x$ (em IR_+)

h) $4^x + 2.\ 14^x = 3.\ 49^x$

(Sugestão: Multiplique por $\frac{1}{14^x}$)

5.2. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 4^{x} = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$ $x, y \in IR_+$

5.3. Resolva as seguintes inequações:

a) $2^{5x-1} > 8$

b) $4^{x^2+1} \leq 32^{1-x}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$

d) $(0{,}3)^{x-5} \leq (0{,}09)^{2x+3} \leq (0{,}3)^{x+6}$

e) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5\,2^{x} + 2 > 0$

f) $x^{3x^2-7x+2} \leq 1$ (Em IR_+^*)

g) $a^{x^2} < a^9$ (a > 0 e a ≠ 1)

h) $|x|^{3x^2-4x-4} > 1$

5.4. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_{2x} x = -2$ b) $\log_{x-3} 4x = 2$ c) $\log_{27}\log_2\log_2(x-1) = \frac{1}{3}$

5.5. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_9(x-1) = \log_3(\sqrt{10x-4}) - \log_3(x+2)$

b) $x^{\log x} = \frac{x^4}{1000}$

c) $(\log x)^{\log x} = x^2$

d) $\log_a ax.\log_x ax = 4, \quad a > 0, a \neq 1$

e) $5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

f) $2^{3x+2} . 3^{2x-1} = 8$

5.6. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} xy = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log\sqrt{x} - \log\sqrt{y} = \log 3 \\ 9y^3 - x^2 = 90y \end{cases}$

5.7. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_3(x^2 - 4x) < \log_{\sqrt{3}}(3\sqrt{5})$

b) $\log_{1/3}(x^2 - 13) \geq -1$

c) $\log(x+2) + \log(x+3) > \log 12$

d) $\log_{(x^2-8)} 11 < \log_{(x^2-8)} 21$

e) $\log_2(x-1) \leq 3 + 10.\log_{(x-1)} 2$

f) $x^{\log_3 x} > x^2$

Apêndice	POTÊNCIAS E LOGARITMOS DE BASE e

A.1. INTRODUÇÃO

O número ***e*** é hoje considerado um dos números mais úteis e importantes da Matemática. Funções envolvendo potências de *e* ou, equivalentemente, logaritmos na base *e*, são muito utilizadas na Matemática Aplicada . Estas funções surgem naturalmente em muitos ramos do conhecimento humano, em problemas de origem as mais diversas, tais como: cálculo do tamanho de populações (Demografia), valor de investimentos (Finanças), idade de antiguidades (Arqueologia), problemas de aprendizagem (tratados pela Psicologia), etc. Daí serem os logaritmos na base ***e***, chamados de *logaritmos naturais*.

Várias são as maneiras de se introduzir logaritmos e potências na base ***e***. Nós o faremos de maneira pouco formal e (esperamos que seja!) mais atraente. Inicialmente, como motivação, usaremos um problema de juros, através do qual definiremos esse número Falaremos em seguida nas funções exponencial e logarítmica na base *e*. Finalmente, veremos aplicações às várias áreas do conhecimento.

A.2. UM PROBLEMA DE JUROS CONTÍNUOS E O NÚMERO e.

Suponhamos que o capital C_o é empregado à taxa de i % ao ano, de sorte que se retirado após uma fração p/q do ano, os juros J sejam proporcionais a esta fração, isto é, sejam iguais a

$$J = \frac{p}{q} \cdot \frac{i}{100} \cdot C_o$$

Vamos analisar os juros obtidos e, consequentemente o montante de um certo capital C_o aplicado á taxa de 100% ao ano, após um ano, nas seguintes situações:

1ª Situação: O capital só é retirado ao final de um ano.

Após 1 ano os juros são iguais

$$J = \frac{100}{100} C_0 = C_0$$

O montante é igual a $C_1 = C_0 + J = C_0 + \frac{100}{100} C_0 = 2C_0$



2ª Situação: O capital é retirado após 6 meses, ou seja, ½ ano, e reaplicado à mesma taxa:

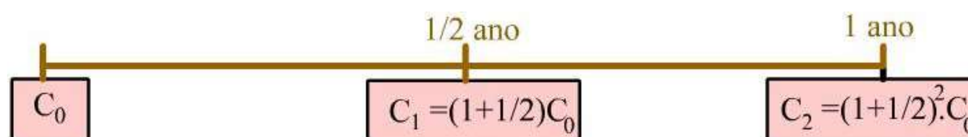
Após 6 meses os juros são iguais a:

$$J = \frac{1}{2} . \frac{100}{100} C_0 = \frac{C_0}{2}$$

O montante é igual a $C_1 = C_0 + \frac{C_0}{2} = C_0 \ (1 + \frac{1}{2})$

Reaplicando este capital mais 6 meses, à mesma taxa, ao final de 1 ano o novo capital é:

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{2} . \frac{100}{100} C_1 = C_1 (1 + \frac{1}{2}) = C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$



3ª Situação: De 4 em 4 meses (1/3 do ano), o capital é retirado e reaplicado à mesma taxa:

Após o primeiro período o capital é igual a :

$$C_1 = C_0 + \frac{1}{3}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

Após o segundo período o capital é igual a

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{3}C_1 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$$

Após o terceiro período o capital é:

$$C_3 = C_2 + \frac{1}{3}C_2 = C_2\left(1+\frac{1}{3}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$$



Vamos comparar as três situações:

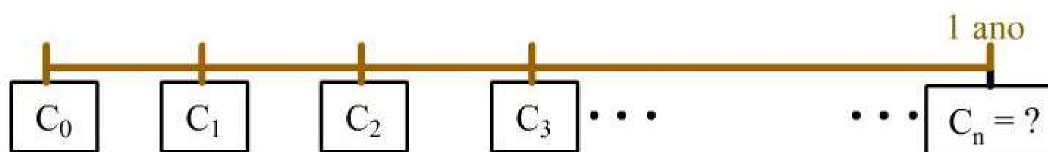
1ª) $C_1 = C_0(1+1) = 2C_0$

2ª) $C_2 = C_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = C_0\left(1+1+\frac{1}{4}\right) = C_0(2{,}250)$

3ª) $C_3 = C_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = C_0\left(1+3.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right) = C_0.(2{,}37037...)$

Isto significa que a 3ª situação é a mais vantajosa! Um aplicador exigente vai querer que os períodos de capitalização sejam cada vez menores.

Suponhamos agora que o ano seja dividido em n partes iguais.



Decorrido o 1º período, os juros são iguais a $\frac{1}{n}C_0$ e o capital é

$$C_1 = C_0 + \frac{1}{n}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Se após cada um desses períodos os juros são capitalizados, ao final de um ano, isto é, após n períodos, o capital é igual a

$$C_n = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Assim como nas situações 1, 2 e 3, a seqüência $C_n = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, isto é,

$$n_1 > n_2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} > \left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2}$$

Um aplicador exigente deve querer que os juros sejam capitalizados mais vezes possível, ou seja, capitalizados a cada instante. Assim, o capital ao final de um ano deverá ser

$$C = C_0 . \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente. Podemos até pensar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pode ser tão grande quanto se queira e, consequentemente, ao final do ano, o capital pode ser bastante grande, bastando para isto que os juros sejam capitalizados mais vezes. **Mas não é isto o que acontece! P**ode-se mostrar que, para qualquer valor de $n \in N^*$, temos

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

Portanto por mais vezes que os juros sejam capitalizados, ao final do ano, o capital não excede a $3C_0$, o triplo do capital inicial.

A esta altura faz sentido a seguinte pergunta: Que interpretação se pode dar à expressão $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$? Vejamos:

Para responder à pergunta formulada, usamos o fato que para todo n,

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

juntamente com o fato que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ é crescente. Concluímos daí que existe um número real, que indicamos por *e*, tal que

$$\boldsymbol{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \quad \text{e} \quad \mathbf{2 < \boldsymbol{e} < 3}$$

Dizemos que o capital C, obtido quando C_0 for empregado durante um ano, à uma taxa de 100% ao ano, a ***juros contínuos*** é igual a $C = e.C_0$

Pode-se mostrar que o número *e* é irracional (e transcendente). A seqüência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ nos oferece aproximações decimais para *e*. Em geral, toma-se a aproximação

$$\boldsymbol{e \cong 2{,}718}$$

Mais geral que o fato de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ para $n \in$ N*, é que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ para $x \in \mathbb{R}_+^*$

A.3. O CASO GERAL DE JUROS CONTÍNUOS

Suponhamos agora que um certo capital C_0 seja aplicado a uma taxa de i % ao ano durante t anos.

Façamos $\frac{i}{100} = \beta$ para simplificar os cálculos.

Se os juros são capitalizados apenas no final de t anos então

$J = \frac{i}{100} tC_0 = BtC_0$ e o novo capital será igual a $C_1 = C_0 + J = (1 + Bt)C_0$

Dividindo o período de t anos em n períodos, temos:

$$1^o \text{ período}: C_1 = C_0 + B.t\frac{1}{n}C_0 = \left(1 + \frac{\beta.t}{n}\right)C_0$$

$$2^o \text{ período}: C_2 = \left(1 + \frac{B.t}{n}\right)C_1 = \left(1 + \frac{\beta.t}{n}\right)^2 C_0$$

....

$$n - \text{ésimo período}: C_n = \left(1 + \frac{\beta.t}{n}\right)^n C_0$$

Assim, fazendo n crescer, ou seja, capitalizando os juros a cada instante, temos que o capital C ao final de t anos é:

$$C = \lim_{n \to +\infty} C_o \left(1 + \frac{\beta.t}{n}\right)^n = C_o \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\beta.t}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\beta.t}} \right)^{\frac{n}{B.t}} \right]^{\beta.t} = C_o\, e^{\beta.t}$$

Portanto $C = C_0.e^{Bt}$.

A.4. UM POUCO DA HISTÓRIA DO NÚMERO e

A invenção dos logaritmos é, como vimos, geralmente atribuída ao matemático John Napier (ou Neper). Os logaritmos de Napier não dependiam da idéia de uma base. Mas, num apêndice da tradução para o inglês de 1618 do trabalho original de Napier em latim, há uma tábua de logaritmos que são, efetivamente, logaritmos naturais. A tábua, que não contém vírgulas decimais, dá o logaritmo de 10 como sendo 2302584, ao passo que sabemos que $\ln 10 = \log_e 10 = 2{,}302584$. A tábua citada, devida provavelmente a William Oughtred, foi ampliada por John Speidell em sua obra New Logarithmus (1662) para os números de 1 a 1000.

Apesar de Napier não ter pensado em base para o seu sistema dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base 1/*e*. Por isso usa-se também o nome de logaritmos neperianos para os logaritmos de base *e*, embora esses não sejam exatamente os que Napier tinha em mente.

Em 1667 outro matemático escocês, James Gregory, mostrou como calcular logaritmos achando as áreas de paralelogramos inscritos entre uma hipérbole e suas assintotas, levando assim á expressão *logaritmos hiperbólicos*.

Com esta nova definição de logaritmos através de área o número *e* pode ser definido como sendo o valor da abscissa x_0 tal que a área da região limitada pelo eixo OX, a reta x =1, a hipérbole y = 1 / x e a reta $x = x_0$ seja igual a 1.

Fundamentando-se nos desenvolvimentos anteriores de séries exponenciais devidos a Newton e Leibniz, Leonhard Euler publicou en 1748 sua *Introduction in analysis infinitorum* , o mais notável tratado sobre o número *e*. Grande parte dessa descrição tão bem desenvolvida de sua teoria da função exponencial já fora dada antes.Com a idade de 21 anos, enquanto vivia na Corte de São Petersburgo, na Rússia, Euler escreveu *Meditações sobre experiências feitas recentemente sobre disparo de canhões*, onde sugeria: "Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos *e*, que é 2,718281..." Esse número era dado pela série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

O uso do símbolo *e* teve origem com Euler e assinala o reconhecimento por ele da existência de um número exato como soma da série e como base do sistema de *logaritmos hiperbólicos*. Usando a relação $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, Euler calculou *e* até a 23ª casa decimal. Devido a esses resultados *e* muitas vezes é chamado de número de Euler.

Euler pode ter sido o primeiro matemático a inferir que *e* é um número irracional. Depois de Liouville ter provado a existência de números transcendentes (1844) Charles Hermite provou que *e* é um número transcendente.

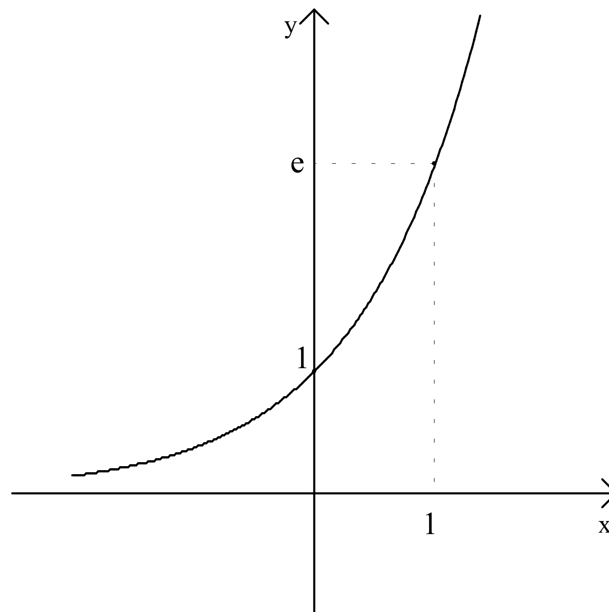
Devido a sua importância os logaritmos naturais ou neperianos têm a notação especial $\log_e x = \ln x$

A.5. AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA DE BASE e.

Seja a função exponencial na base *e*

$$f: R \to R_+^*$$
$$x \mapsto e^x$$

Como $e > 1$ então f é crescente e o seu gráfico tem o seguinte aspecto



Definição: Dado $x \in R_+^*$, o logaritmo natural de x (ou o logaritmo neperiano de x) é o logaritmo de x na base *e*, que é denotado por lnx ou $\log_x$.

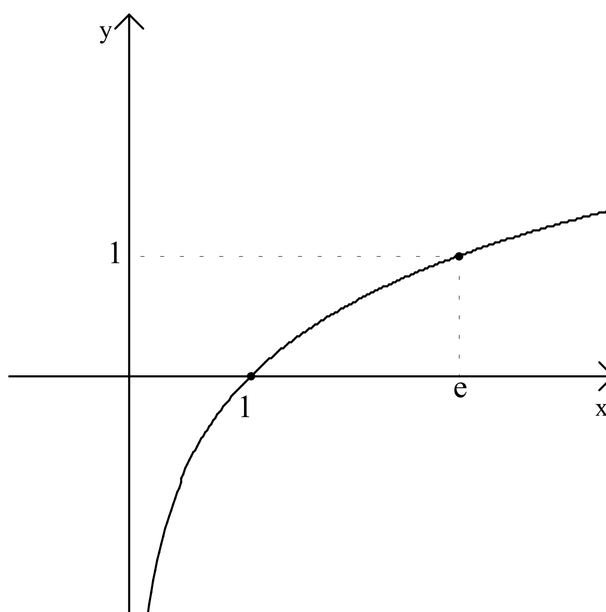
Isto é, por convenção,

$$\log_e x = \ln x$$

Como $e > 1$, é crescente a função logarítmica nesta base

$$f : R \to R_+^*$$
$$x \mapsto lnx$$

e o seu gráfico tem o seguinte aspecto



A.6. APLICAÇÕES

Observemos que no exemplo de juros contínuos, visto em A.3. temos que a variação do capital em cada instante é proporcional ao capital existente no dado instante (isto é, os juros são capitalizados instantaneamente e são proporcionais ao capital existente naquele instante), a taxa de proporcionalidade é $B = \frac{i}{100}$. Dado o capital no instante inicial igual a C_0, o capital depois de t anos é igual a C(t) = $C_0 e^{Bt}$

De forma análoga, suponhamos uma determinada grandeza *Q* que varie com o tempo t. Indiquemos por Q(t) o valor dessa grandeza no instante t.
Suponhamos também que a variação da grandeza (crescimento ou decrescimento), em cada instante t, seja proporcional ao valor da própria grandeza no instante t.

Sejam $\beta > 0$ a constante de proporcionalidade (absoluta) e $Q_0 = Q(0)$ a quantidade inicial da grandeza. Usando argumentos análogos aos usados para juros contínuos chegamos à conclusão que :
$Q(t) = Q_0\, e^{\beta.t}$ se Q(t) cresce com o tempo e $Q(t) = Q_0\, e^{-\beta.t}$ se Q(t) decresce com o tempo. Em ambos os casos, podemos escrever $Q(t) = Q_0\, e^{\alpha.t}$ com $|\alpha| = \beta$ e $\alpha > 0$ se Q(t) cresce com o tempo e $\alpha < 0$ se Q(t) decresce. Dizemos que α é a constante de proporcionalidade da grandeza Q.

Este modelo matemático se aplica às situações mais diversas, como ilustraremos a seguir:

1. Juros Contínuos

Exemplo:

Empregando-se um capital C_0 a juros contínuos de 20% ao ano, em quanto tempo esse capital será dobrado?

Solução: Temos que $C(t) = C_0\, e^{\frac{20}{100}t}$. Queremos encontrar o tempo t para que $C(t) = 2C_0$

Assim,

$$2C_0 = C_0 e^{\frac{20}{100}i} \Rightarrow 2 = e^{\frac{t}{5}} \Rightarrow \ln 2 = \frac{t}{5} \Rightarrow t = 5.\ln 2 \cong 5(0{,}6931) \cong 3{,}46$$

ou seja, aproximadamente 3 anos e meio.

De modo geral, se a taxa de juros contínuos é de i% ao ano, então um capital C_0 leva o tempo $t = 100.\frac{\ln(s)}{i}$ anos para tornar-se *s* vezes o seu valor inicial. De fato:

$$s.C_0 = C_0 e^{\frac{i}{100}t} \Rightarrow s = e^{\frac{i}{100}t} \Rightarrow \ln(s) = \frac{i}{100}t \Rightarrow t = \frac{100.\ln(s)}{i} \text{ anos}$$

2. Desintegração Radioativa

.

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radiativo é proporcional á massa da substância original presente no corpo naquele instante. Como a quantidade da substância original decresce temos que a constante de proporcionalidade α é um número negativo. Cada substância radioativa tem sua taxa de desintegração k, tal que $\alpha = -k$, que é determinada experimentalmente.

Consideremos um corpo de massa M_0 formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é k. Num instante t qualquer, a massa da substância será de $M(t) = M_0\, e^{-kt}$ $(k > 0)$. Para cada unidade de tempo considerada a constante k é alterada proporcionalmente.

Na prática a constante k fica determinada a partir de um número básico chamado de *meia-vida* da substância. A *meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância. Vejamos alguns exemplos:

Substância	**Meia Vida**
Polônio 218	2 min 45 seg
Polônio 214	$1,64x10^{-4}$ seg
Urânio (isótopos)	da ordem de 10^9 anos
Carbono 14	5570 anos

Se sabemos que certo elemento radioativo tem *meia-vida* igual a t_o unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0 Assim,

$$\frac{1}{2} = e^{-k.t_o} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -kt_o \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_o}$$

Isto nos mostra como calcular a taxa e desintegração k quando se conhece a meia-vida t_o. Reciprocamente, tem-se $t_o = \frac{\ln 2}{k}$, o que permite calcular a meia-vida t_o em função da taxa k.

3. O método do Carbono 14 (C^{14})

O carbono 14 é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeamento da Terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} se mantém constante. O C^{14} é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas, o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira. Para isso precisamos saber que a *meia-vida* do C^{14} é de 5570 anos. Segue-se daí que a constante de desintegração do C^{14} é

$$k = \frac{\ln 2}{5570} = 0{,}0001244$$

Exemplo: Vejamos como este conhecimento foi usado para resolver uma controvérsia. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur (que viveu há mais de 1500 anos). Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa *M* hoje existente na mesa é 0,894 vezes a massa M_o de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. *M*o é também a massa de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita a t anos. Temos que:

$$M = M_o e^{-kt} \Rightarrow \frac{M}{M_o} = e^{-kt} \Rightarrow 0{,}894 = e^{-0{,}0001244t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 0{,}894}{0{,}0001244}$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{0{,}1121}{0{,}0001244} = 901$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda ela deveria ter mais de 1500 anos.

4. Resfriamento de um corpo

Uma situação análoga à da desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo) cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. *A lei do resfriamento de Newton* diz que, nessas condições, a diferença de temperatura , entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, essa lei se traduz matematicamente. Chamando T_o a temperatura no instante t = 0 e T_a a temperatura do ambiente (ou do meio) temos que:

$$T - T_a = (T_o - T_a)e^{-kt} \ (k > 0) \Rightarrow T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$$

Assim, a temperatura num instante t qualquer é dada por

$$T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$$

(Represente graficamente a função T)

A constante k depende do material de que é constituída a superfície do objeto. A lei do resfriamento vale também (com expoente positivo) para o aquecimento de um corpo frio colocado num ambiente mais quente.

Exemplo:

Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°. A água que fervia numa panela, 5 minutos depois de apagado o fogo, tem a temperatura de 65°. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38° ?

Solução: Sabendo que a água ferve a 100°, temos:

$$T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt} = 30 + (100 - 30)e^{-kt} = 30 + 70e^{-kt}$$

Usando a informação que T = 65° para t = 5 min, calculamos a constante k

$$65 = 30 + 70e^{-5k} \Rightarrow 35 = 70e^{-5k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-5k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,693}{5} = 0,1386$$

Assim, temos que:

$T(t) = 30 + 70e^{-0,386t}$ e como queremos encontrar o valor de t para T=38°:

$$38 = 30 + 70e^{-0,1386t} \Rightarrow \ln\left(\frac{8}{70}\right) = -0,1386t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0,1386} = \frac{2,1691}{0,1386} = 15,65$$ o que

corresponde a pouco mais de 15 minutos e meio.

A.7. EXERCÍCIOS.

A.1. A que taxa anual de juros contínuos devo investir meu capital de maneira que ele dobre ao fim de 5 anos?

A.2. Um investidor aplica na Bolsa de Valores determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo esta quantia será quadruplicada, supondo que o aumento é proporcional à quantidade presente em cada instante?

A.3. Um ator de cinema precisava fazer um regime para emagrecer em virtude de seu papel num novo filme. O diretor exigiu que ele perdesse a terça parte do seu peso, que era de 120kg, seguindo uma dieta racional que o emagrecesse proporcionalmente ao peso de cada instante. Nestas condições, sabendo-se que iniciada a dieta, o artista emagreceu 20kg em 40 dias, quanto tempo será necessário para que ele comece a atuar no filme?

A.4. A *escherichia coli* é uma bactéria encontrada no intestino humano onde, evidentemente, o número de indivíduos é aproximadamente constante. Todavia, quando cultivada em condições ideais de laboratório, sua população duplica a cada 20min. Qual a expressão que dá o número de bactérias após um tempo t? Numa experiência ideal de laboratório, iniciada com 10 bactérias, quantas deverão existir após 5 horas e 40min? E depois de 5 horas e meia?

A.5. Se, no instante t = 0, um recipiente contém um número N_0 de bactérias se reproduzindo normalmente, então num instante t > 0, o número de bactérias existente no recipiente será

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

onde a constante k depende do tipo de bactéria. Suponha que uma cultura de 100 bactérias se reproduza em condições favoráveis. Doze horas mais tarde contamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá 2 dias depois do início da experiência?

A.6. Numa certa colônia, bactérias nascem e morrem em taxas proporcionais à quantidade presente em cada instante. Supondo que a colônia dobra de tamanho em 24 horas e que teria seu tamanho reduzido à metade em 8 horas, se não houvesse nascimento, determine a quantidade de bactérias presentes em um instante t qualquer, e as taxas de proporcionalidade de nascimento e morte.

A..7. Cem gramas de cana de açúcar em água estão sendo transformadas em dextrose, numa razão que é proporcional á quantidade não-transformada. Determine a quantidade de açúcar transformado em um instante t qualquer, sabendo-se que após 10 minutos foram transformadas 50gr.

A.8. O isótopo radioativo tório 234 desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 miligramas desta substância são reduzidas a 82,04 miligramas em uma semana, determine a expressão para a quantidade presente em qualquer tempo e a meia-vida desta substância.

A.9. Uma substância radioativa decompõe-se a uma taxa proporcional à quantidade presente e no fim de 1500 anos ela se reduz à metade da quantidade original. Em quantos anos a quantidade original reduz-se de $\frac{3}{4}$? Qual a quantidade de substância encontrada no fim de 2000 anos?

A.10. Se 10% de um certo material radioativo se desintegram em 5 dias, qual é a meia-vida do material?

A.11. Na caverna de Lascaux na França , famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do C^{14} era 0,145 vezes a radioatividade normalmente encontrada num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão encontrado na caverna e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.

A.12.A meia-vida do cobalto radioativo é de 5,27 anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto, numa certa região, a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Ignorando a presença provável de outros elementos radioativos, determine quanto tempo deverá passar para que a região seja novamente habitável.

A.13. Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém passado seja de 90°. Um minuto mais tarde, a temperatura já diminuiu para 85°C, numa sala a 20°C. Considerando válida a lei do resfriamento de Newton, determine o tempo para que a temperatura do café atinja 65°C.

A.14. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto. O perito da polícia chegou à 1:00h da madrugada e imediatamente tomou a temperatura do cadáver que era de 34,8°. Uma hora mais tarde ele tomou novamente a temperatura e encontrou 34,1°. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima era mantida constante a 20°. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5°.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

A.1. i% ≅ 13,86%

A. 2. $t = \dfrac{\ln 4}{0{,}0366}$ meses (aproximadamente 37 meses e 27 dias)

A. 3. $t = \dfrac{\ln 1{,}5}{0{,}0045}$ dias (aprox. 90 dias)

A. 4. $N(t) = e^{0{,}0346t}$ t em min. Após 5h:40min N ≅ 1.310.720 e após 5h:30min N ≅ 1.853.600 .

A. 5. $N = 100e^{6{,}4368}$

A. 6. $Q(t) = Q_0 e^{(\ln 2/24)t}$; taxas: (nascimento $\dfrac{\ln 2}{6}$), (morte $\dfrac{\ln 2}{8}$)

A. 7. $Q(t) = 100 - 100e^{-0{,}0693t}$

A. 8. $\mathrm{Q(t) = Q_0 e^{ln(0{,}824)t}}$; meia vida; $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}1989}$ semanas (aprox. 3 semanas e 3 dias)

A. 9. $t = \dfrac{\ln 4}{0{,}0005}$ anos (aprox. 2773 anos); $Q = Q_0 e^{-1}$

A. 10. $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}0209}$ dias (aprox. 33 dias)

A. 11. $t = \dfrac{-5570 \ln(0{,}145)}{\ln 2}$ anos (aprox. 15518 anos)

A. 12. $t = \dfrac{(10{,}54)\ln 10}{\ln 2}$ anos (aprox. 35 anos e 1 mês)

A. 13. $t = \dfrac{\ln(1{,}5555)}{0{,}0770}$ minutos (aprox. 5'40'')

A. 14. O intervalo de tempo decorrido da hora em que se deu o assassinato até a chegada do perito foi de $\Delta t = \dfrac{\ln(165/148)}{\ln(148/141)}$ h (aprox. 2h 15min)

6. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Capítulo 2

2.1. a) $3^{19/12}$; b) $8\sqrt{2}$; c) $\dfrac{1}{4}$

2.2. a) x^5; b) $1 + a$; c) $\dfrac{-2}{b^2+1}$; d) $\dfrac{12}{5}$; e) 1; f) $\sqrt{x}$; g) $\dfrac{1}{8}$; h) $x - 1$

2.3. a) 7; b) 47

2.4. a) { 4 }; b) { 2 }; c) { –1 }; d) { 0, 4 }

Capítulo 3

3.1. a) $\dfrac{1}{6}$; b) $\dfrac{25}{2}$; c) $9\sqrt{3}$; d) $\dfrac{8}{3}$

3.2. a) $\dfrac{45}{\sqrt{a}.\sqrt[3]{b}}$; b) $\sqrt[5]{\dfrac{(a-b)^2 b^4}{(a+b)^2}}$;

3.3. $\dfrac{p+q}{7}$

3.4. m – n

3.5. $\dfrac{30}{31}$

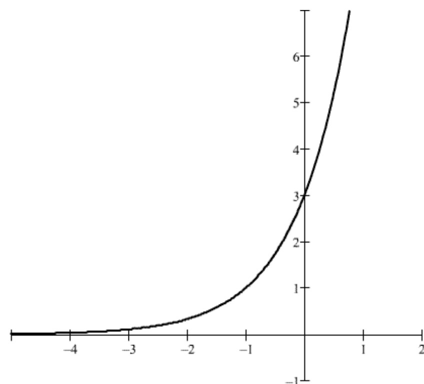
3.7 $r = \log_a q$

3.9. p = S (s – S) e P = s (2S – s)

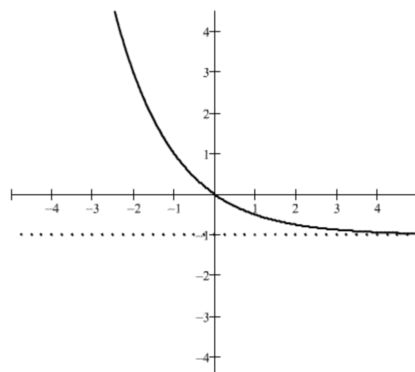
Capítulo 4

4.1

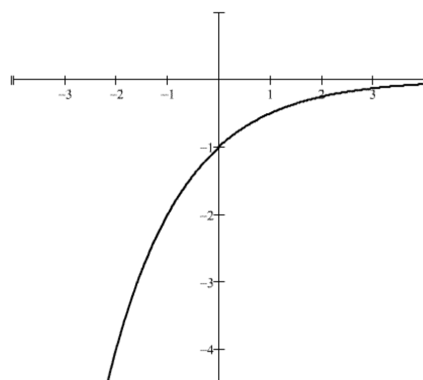
a)



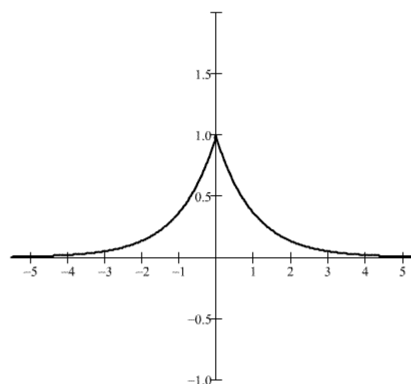
b)



c)



d)



4.3. a) $[-1,1]$; b) $(-2,3[\ -\{\ 2\ \}$; c) $]3,+\infty[$; d) $]-\infty,-\log_3 5[\cup]-1,+\infty[$

4.4. a) $f^{-1}(x)=5^{x-2}$; $D(f^{-1})=R$ e $Im(f^{-1})=R_+^*$;

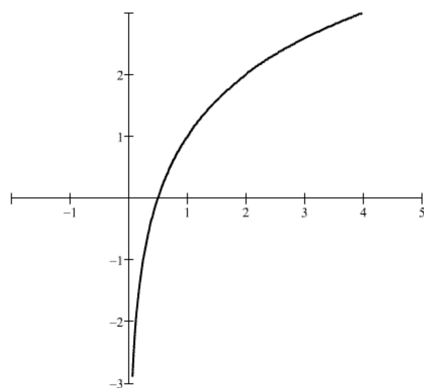
b) $f^{-1}(x)=\dfrac{\log_3 x-3}{2}$; $D(f^{-1})=R_+^*$ e $Im(f^{-1})=R$;

c) $f^{-1}(x)=10^{1/x}$; $D(f^{-1})=R^*$; $Im(f^{-1})=R_+^*-\{\ 1\ \}$;

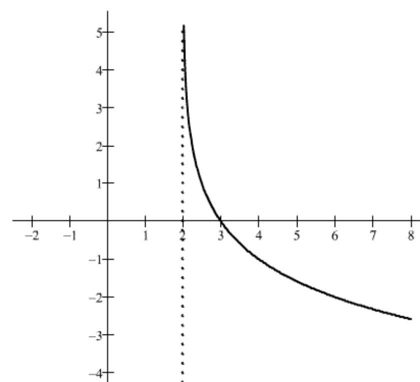
d) $f^{-1}(x)=\log_5\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}\right)$; $D\,(f^{-1})=Im\,(f^{-1})=R$

4.5.

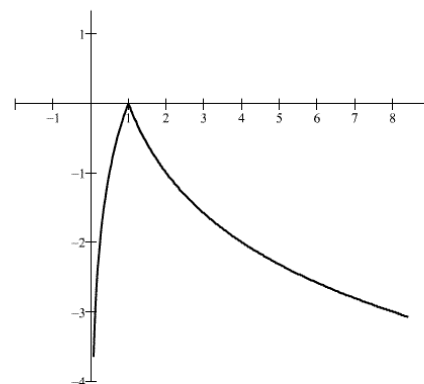
a)



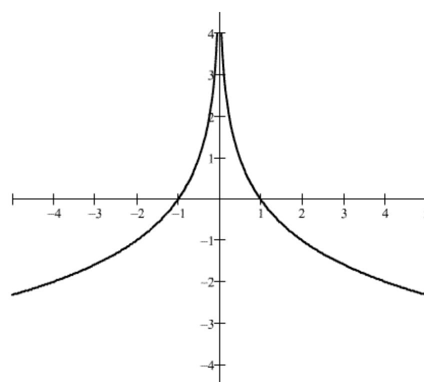
b)



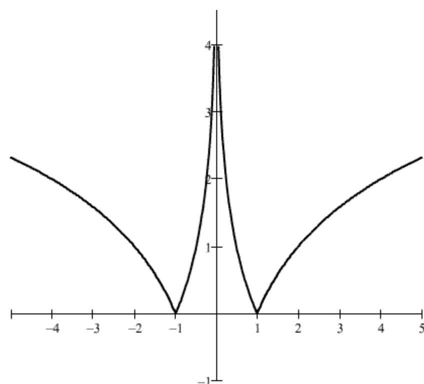
c)



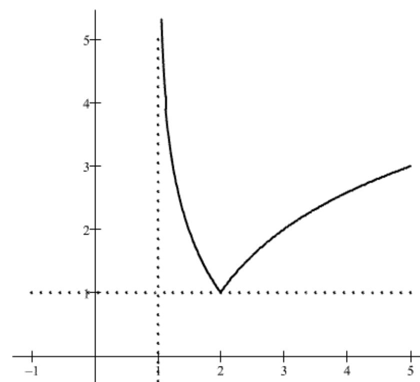
d)



e)



f)



Capítulo 5

5.1. a) $\{ -4, 5 \}$; b) $\{ 5 \}$; c) $\{ 1 \}$; d) $\{ 3 \}$; e) $\{ 1 \}$; f) $\{ 1, \sqrt{2} \}$;

g) $\left\{0,1,\frac{3}{2}\right\}$; h) { 0 }

5.2. a) { (3,4) }; b) $\left\{\left(3^{-1/3},3^{2/3}\right)\right\}$

5.3. a) $]\frac{4}{5},+\infty[$; b) $[-3,\frac{1}{2}]$; c) $[-\frac{9}{4},+\infty[$; d) $\varnothing$; e) $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$

f) $[1,2]\ \cup\ [0,\frac{1}{3}]$; g)

$a>1 \Rightarrow S=]-3,3[$; $) < a < 1 \Rightarrow S=]-\infty,-3[\ \cup\ ]3,+\infty[$

g) $]-\infty,-1[\cup]-\frac{2}{3},0[\cup]0,1[\cup]2,+\infty[$

5.4. a) { $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ }; b) { 9 }; c) { 257 }

5.5. a) { 2 }; b) { 10, 10^3 }; c) { 10^{100} }; d) { a }; e) { $\log_{5/3}(13/6)$ };

f) { $\log_{72} 6$ }

5.6. a) { (8,2) }; b) { (90,10) }

5.7. a)]–5,0[∪]4,9[; b) $]-4,-\sqrt{13}[\cup[\sqrt{13},4]$; c)]1, + ∞ [;

d)]–∞ , –3[∪]3, +∞ [; e) $]1,\frac{5}{4}]\cup]2,33]$ f) $]0,1[\cup]9,+\infty[$

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às Funções e à Derivada*. Editora Atual

IEZZI, Gelson [et al]. *Fundamentos de Matemática Elementar - vol 2*. Editora Atual

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. IMPA/VITAE

NETO, Aref Antar [et al]. *Progressões e Logaritmos - Noções de Matemática vol 2.* Editora Moderna

TROTA, IMENES, JAKUBOVIC. *Matemática Aplicada - 2º Grau* . Editora Moderna

Trigonometria

Adelmo Ribeiro de Jesus
Eliana Prates Soares
Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Graça Luzia Dominguez Santos
Ilka Rebouças Freire
Miriam Fernandes Mascarenhas



Instituto de Matemática - UFBA

Projeto Pró-Ciências/99

A Matemática e Suas Conexões

Reformulada em 2003 pelas
Professoras: Cristiana Valente, Eliana Prates,
Graça Santos e Miriam Mascarenhas

ÍNDICE

TRIGONOMETRIA

1. INTRODUÇÃO

A Trigonometria é um dos temas mais importantes da Matemática. Isto se deve ao fato de que ela possui aplicações, desde as mais simples até as mais complexas, em diversas áreas da Ciência e Tecnologia.

Os teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes já tinham sido usados pelos egípcios e babilônios. Os gregos foram os primeiros a estabelecer a relação entre ângulos (ou arcos) de um círculo e os comprimentos das cordas que o subtendem. Estas relações foram utilizadas por eles para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas da Terra ao Sol e à Lua.

Inicialmente o problema principal da Trigonometria era a resolução de triângulos. Com o desenvolvimento da Análise Matemática, foi necessário definir seno, cosseno e tangente para todo número real, ou seja, como funções.

Devido à periodicidade de vários fenômenos da natureza, tais como: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, é fácil perceber a enorme importância das funções periódicas na Matemática e na Física e as suas conexões com os outros ramos do conhecimento. As funções trigonométricas vêm, portanto, resolver uma série de problemas onde os fenômenos periódicos aparecem.

2. A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c (Figura 1).Sabemos do ensino fundamental as definições:

O seno de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa, e é indicado por $\text{sen}(\hat{B})$;

O cosseno de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa, e é indicado por $\cos(\hat{B})$.

A tangente de $\hat{B}$ é igual à razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a $\hat{B}$, e é indicada por $\text{tg}(\hat{B})$.

Portanto:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}(\hat{B}) = \frac{b}{c}$$

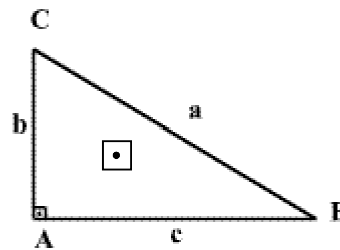


Figura 1

Estas equações definem o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo qualquer, visto que:

Todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo.

Dois triângulos retângulos quaisquer, que tenham um mesmo ângulo agudo, são semelhantes. Isto é, se os triângulos ABC e A'B'C' são tais que $\hat{B} = \hat{B}'$ então (Figura 2) são semelhantes. Neste caso temos,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Logo, sen $\hat{B}$' = sen $\hat{B}$, cos $\hat{B}$' = cos $\hat{B}$ e tg $\hat{B}$' = tg $\hat{B}$.

Portanto, o seno, o cosseno, e a tangente dependem apenas do ângulo agudo e não do triângulo considerado .

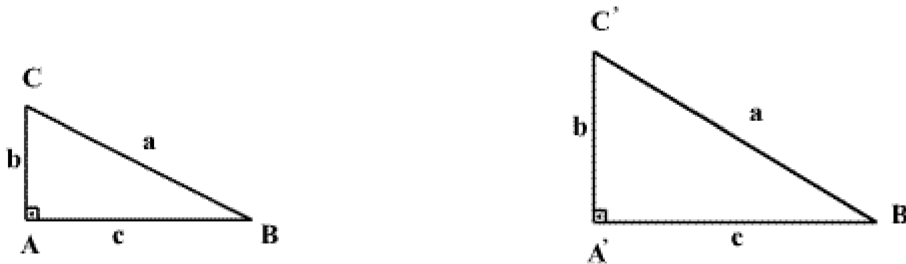


Figura 2

Observemos que dado o triângulo retângulo ABC (figura 1), como $b = a \text{ sen}\hat{B}$ e $c = a \cos \hat{B}$, então,

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{a \text{ sen } \hat{B}}{a \cos \hat{B}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$$

As funções seno de $\hat{B}$, cosseno de $\hat{B}$ e tangente de $\hat{B}$ são chamadas de funções trigonométricas.

Observemos ainda que, $\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \cos \hat{C} = \cos (90^0 - \hat{B})$,

isto é : o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo do seu complementar, o que justifica a denominação co-seno.

Como exemplo temos :

$\cos 30^0 = \text{sen } (90^0 - 30^0) = \text{sen } 60^0$

$\cos 45^0 = \text{sen } (90^0 - 45^0) = \text{sen } 45^0$.

A Relação Fundamental

Dado um triângulo retângulo ABC (Figura 1), temos :

$$(\cos\hat{B})^2 + (\operatorname{sen}\hat{B})^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 + b^2 = a$, chegamos então à seguinte relação, chamada de <u>relação fundamental</u>:

$$\boxed{\cos^2 \hat{B} + \operatorname{sen}^2 \hat{B} = 1}$$

3.APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

A Trigonometria relaciona ângulos com segmentos, por isso é muito eficiente como instrumento de cálculo na geometria, permitindo medir comprimentos inacessíveis às medidas diretas.

As aplicações da trigonometria no cálculo de medidas inacessíveis já eram feitas na antigüidade, séculos antes de Cristo, como veremos nos três exemplos a seguir.

I. A Grécia e o Cálculo do Raio da Terra

Os gregos usaram o seguinte método para medir o raio da Terra :

Sobe-se em uma torre de altura h e mede-se o ângulo θ que faz a reta BC do horizonte de B com a vertical BO do lugar. Sendo R o raio da terra temos (figura 3) :

$$\frac{R}{R+h} = \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \text{Logo,} \quad R = \frac{h \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

Portanto, se tivermos as medidas de h e θ que são acessíveis podemos calcular o raio R da Terra.

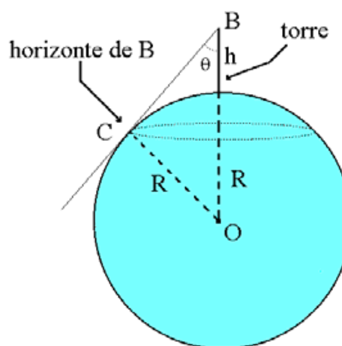


Figura 3

II. Eratóstenes e o Cálculo da Circunferência e do Raio da Terra

Eratóstenes (277-196 A.C.) era Bibliotecário-Chefe do Museu de Alexandria, e foi nos livros que tomou conhecimento do seguinte fenômeno: Quando o sol se encontrava mais ao norte, os raios solares caiam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siena, a 800 km de Alexandria *(isto era sabido porque a imagem do sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos desta cidade.* Naquela mesma hora, em Alexandria, os raios caiam inclinadamente, fazendo um ângulo de aproximadamente $7{,}2^0$ com a vertical, ou seja, 1/50 da circunferência completa, que corresponde ao ângulo de 360^0 *(esse ângulo era medido através da comparação da sombra de um obelisco, por exemplo, com a sua altura)*
(Figuras 4 e 5)

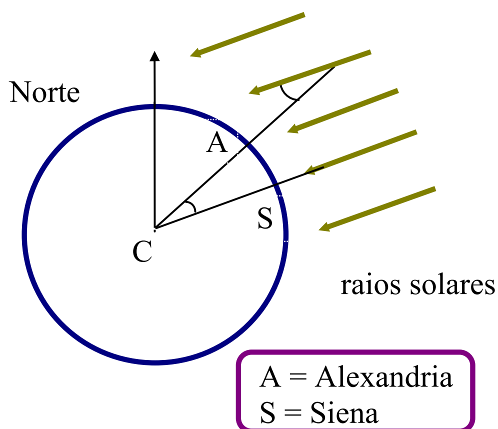


Figura 4

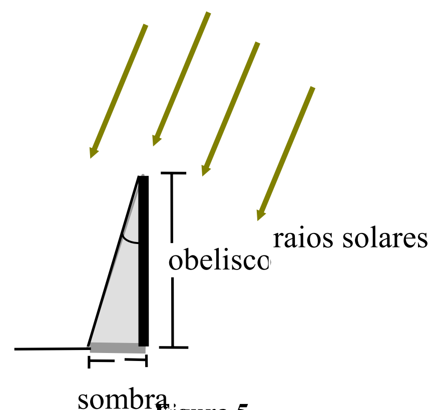


Figura 5

Como os raios solares são praticamente paralelos entre si, então o ângulo central $A\hat{C}S$ também mede 7,2°.

Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos, temos:

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360}{7{,}2},$$

onde R é o raio da Terra.

Como a distância de Alexandria a Siena é 800 km, temos

$$2\pi R = 800 \times \frac{360}{7{,}2} = 40.000$$

Usando (como faziam os gregos) 3,14 para o valor de π, obtemos que o raio da Terra é de aproximadamente R = 6.366 km

> ☞ Sabe-se atualmente que a circunferência da Terra mede 40.024 km e o raio 6378 km

III . Aristarco de Samos e as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol

Existem duas posições da Lua em sua órbita, "o quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura. (Figura 6).

Quando isso ocorre, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo em L (Figura 7).

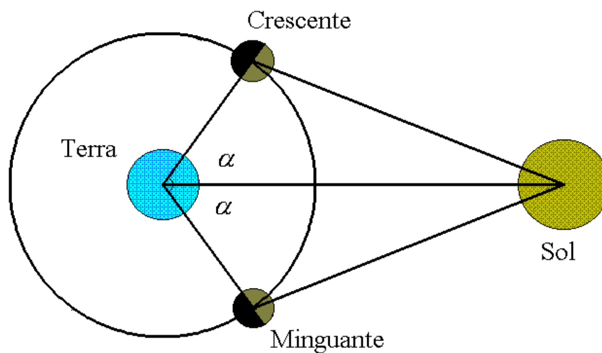


Figura 6

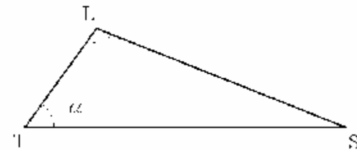


Figura 7

Para calcular o ângulo α (Figura 7) basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo da passagem de minguante para crescente. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante para crescente durava 14,25 dias. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, podemos escrever a proporção:

$$360^0 \quad ____ \quad 29{,}5$$
$$2\alpha \quad ____ \quad 14{,}25$$

ou seja,

$$\frac{360}{2\alpha} = \frac{29{,}5}{14{,}25}$$

Donde obtemos $2\alpha = \dfrac{14{,}25 \,.\, 360}{29{,}5}$, logo $\alpha = 86{,}95^0$.

Portanto (Figura 7) $\dfrac{TL}{TS} = \cos\alpha = 0{,}053$. Então, a relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua deve ser

TS =18,8 TL

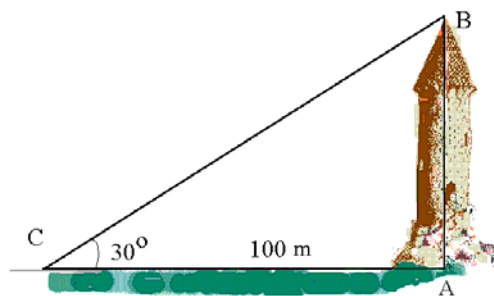
> ➷ O resultado de Aristarco está muito longe do valor conhecido hoje, TS ≅ 400 TL. Ao que tudo indica o erro de Aristarco no cálculo de α deve-se à peculiaridade do movimento da Lua na época. (*conforme G. Abell em seu livro, Exploration of the Universe*)

EXEMPLOS COMPLEMENTARES

As idéias usadas nesses exemplos são simples e excepcionais ao mesmo tempo, e servem como uma excelente motivação para o estudo da Trigonometria. Apresentamos a seguir mais três exemplos das conexões da Trigonometria com os problemas do dia-a-dia.

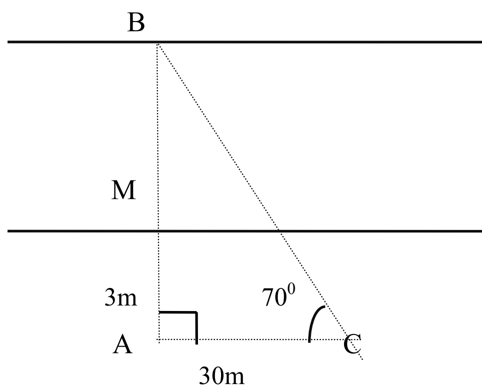
1) O topo de uma torre vertical AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de 30°. A distância de C à base da torre é 100m. Calcule a altura da torre.

Obs.: tg $30^o \cong 0{,}58$



Resp.: 58m

2) Para medir a largura de um rio de margens paralelas, sem atravessá-lo, um observador no ponto A visa um ponto fixo B na margem oposta, perpendicularmente às margens. De A, ele traça uma perpendicular à linha AB e marca sobre ela um ponto C, distando 30m de A. Em seguida, ele se desloca para C, visa os pontos B e A, e mede o ângulo $B\hat{C}A = 70^0$. Sabendo que a distância, sobre AB, de A à margem do rio é de 3m e que tg $70^0 \cong 2{,}75$, calcule a largura do rio.

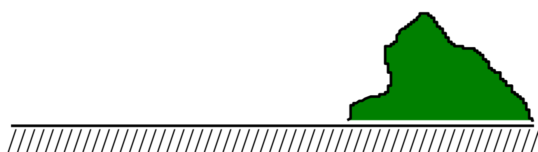


Resp.: 79,5

3) Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15^0 (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância de 20m em direção à montanha ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30^0. Qual é a altura da montanha?

Obs.: $tg\ 30^0 \cong 0.58$

$tg\ 15^0 \cong 0,27$



Resp.: 10,1

3. ARCOS E ÂNGULOS

Já temos a definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo θ, quando θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, isto é, θ é um ângulo agudo tal que $0 \leq \theta < 90°$. O nosso objetivo agora é estender esses conceitos para o ângulo nulo e para os ângulos maiores ou iguais a $90°$. Melhor ainda, queremos que as funções trigonométricas tenham significado não apenas para ângulos, mas para um número real qualquer, e que sejam mantidas as relações básicas:

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,\theta = \text{sen}\,\theta / \cos\theta$$

Para isto será de fundamental importância, como veremos, a noção de comprimento de uma curva, mais particularmente, do círculo.

De uma maneira geral a noção de medida pressupõe uma comparação (razão) entre grandezas. Por exemplo, a medida ou comprimento de um segmento de reta AB é um número que deve exprimir "quantas vezes" o segmento AB contém o segmento u, fixado previamente, que se convenciona tomar como unidade de comprimento ou como segmento unitário. A partir dessa idéia simples pode-se chegar a uma definição precisa do comprimento de um segmento de reta.

A definição de comprimento de uma curva já não é tão simples. Intuitivamente podemos pensar no comprimento de uma curva como sendo o comprimento de um fio (de arame ,por exemplo) que foi ajustado sobre a curva . Para o círculo em particular, temos uma idéia mais refinada. Tomemos para isto um polígono convexo, inscrito num círculo, com n lados. Se o número de lados for suficientemente grande, a nossa intuição diz que o perímetro desse polígono será muito próximo do comprimento do círculo.(*veja, na figura abaixo, um círculo e dois polígonos nele inscritos: um quadrado e um octógono*)

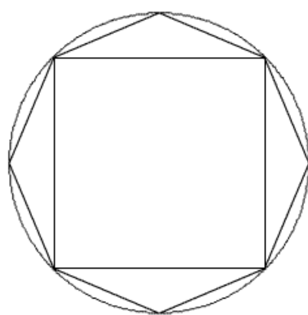
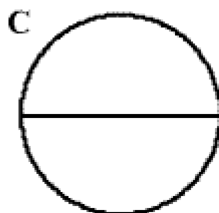


Figura 1

Usando este raciocínio, matemáticos babilônios (2000 a.C.) observaram que a *razão entre o comprimento de qualquer círculo e o seu diâmetro era constante, aproximadamente igual a 3. Mais tarde, os gregos chegaram à aproximação 3,14 para este número.* Esta razão, que de fato é uma constante, corresponde ao número irracional que hoje conhecemos como o <u>número π</u> . Assim, se um círculo tem comprimento C e diâmetro $2r$ temos que:

$\frac{C}{2r} = \pi$, ou equivalentemente , $\boxed{C = 2\pi\, r}$.



$$\frac{C}{2r} = \pi$$

Figura 2

Quando r = 1, temos pela relação anterior, $C = 2\pi$. Por essa razão, diz-se que:

☞ *" O número π é o comprimento do semicírculo de raio igual a um ".*

Agora que já temos uma idéia do significado do comprimento de um círculo vamos introduzir mais alguns conceitos para dar continuidade à nossa idéia, que é de estender as definições das funções trigonométricas.

Dados dois pontos distintos A e B sobre um círculo, este fica dividido em duas partes (Figura 3). Cada uma destas partes que incluem A e B é chamada de *arco do círculo* e é indicada por AB. Se AB é um diâmetro, isto é, (passa pelo centro do círculo) então os arcos determinados são dois *semicírculos.* A reta que passa por A e B divide o plano em dois semi-planos. Se AB não é um diâmetro, o arco que fica no mesmo semi-plano que contém o centro do círculo é chamado de *arco maior* e o que fica no outro semi-plano é chamado de *arco menor*. Se A=B dois arcos são determinados: O *arco nulo*, e o círculo inteiro, ou *arco de uma volta.*

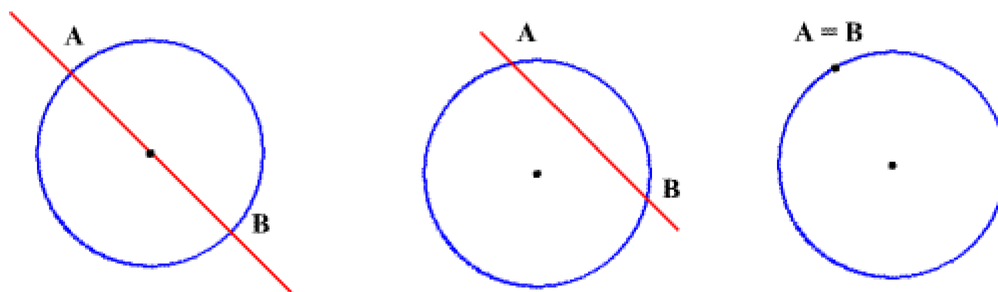


Figura 3

Definido o que é um arco de círculo podemos pensar que a propriedade mais natural a ser medida num arco é o seu comprimento. Entenderemos como <u>comprimento do arco AB</u>, o comprimento do segmento AB' que seria obtido se pudéssemos "esticar", ou retificar, o arco AB.

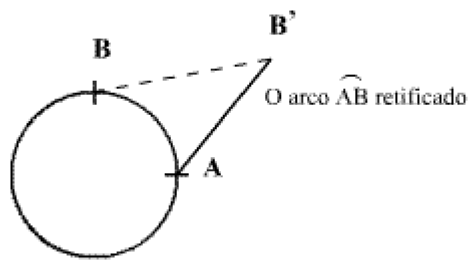


Figura 4

Dados dois pontos A e B sobre um círculo de centro em O então o ângulo AÔB é chamado de <u>*ângulo central*</u>. Dizemos também que o *arco menor AB subtende o ângulo central AÖB.*

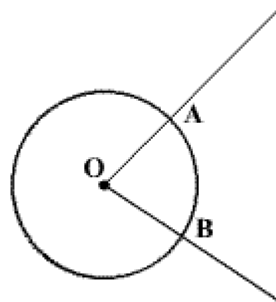


Figura 5

4. MEDIDAS DE ÂNGULOS E DE ARCOS; GRAU E RADIANO

Existem diversas maneiras de se medir ângulos, dependendo da unidade que se adota. Há duas unidades que se destacam: O grau e o radiano.

- *grau* é uma unidade de medida para ângulos e mede a "abertura" de um ângulo. É obtido dividindo-se o ângulo raso em 180 partes, e o ângulo correspondente a uma dessas partes é chamado de *ângulo de 1 grau.*

Dizemos, de modo natural, que um arco AB que subtende um ângulo de θ graus, tem *medida angular θ*. Resumindo, temos:

> ➯ *A medida angular, em graus, do arco menor AB é a medida do ângulo central AÔB, tomada em graus.*

Assim, o grau passa a ser também uma unidade de medida também para arcos. Deve ficar claro que esta é uma medida angular, que é diferente da medida, ou comprimento, desse arco.

Na figura abaixo temos dois arcos com a mesma medida angular, mas com comprimentos diferentes.

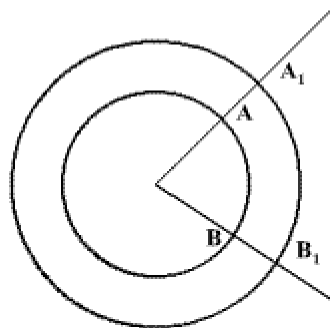


Figura 1

Para introduzir outra unidade de medida para ângulos, e conseqüentemente para arcos, faremos algumas considerações.

Inicialmente, vamos lembrar um resultado da Geometria Plana:

> ➯ *"Dois arcos de círculos são semelhantes se subtendem um mesmo ângulo central e a razão de semelhança é a razão entre os raios".*

Considerando os círculos concêntricos de raios r e r', sejam s e s' os comprimentos dos arcos AB e A'B' respectivamente. Temos que $\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$

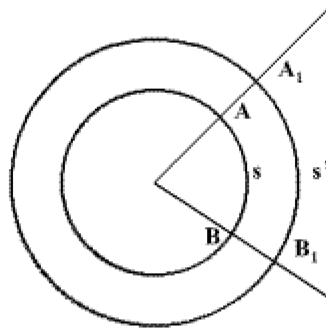


Figura 2

Observemos que a razão entre o comprimento dos arcos e os raios é constante. Isto nos leva a relacionar esta constante a uma nova medida para ângulos.

Consideremos um ângulo central AÔB em um círculo de raio R que subtende o arco AB de comprimento S. Definimos a *medida em radianos do ângulo AÔB* como sendo a razão entre o comprimento S do arco AB e o seu raio R.

$$\text{AÔB} = \frac{S}{R} \quad \text{radianos}$$

Analogamente, a _medida em radiano do arco AB_ é a medida em radiano do correspondente ângulo central.

Usamos abreviadamente os termos rad, rd, para exprimir o radiano

Como conseqüências da definição de radiano temos que:

1) Um ângulo de 1 radiano é o que subtende um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo que o contém.

2) Se S é o comprimento do arco determinado por um ângulo central de medida igual a α radianos em um círculo de raio R então

$$\alpha \text{ rad} = \frac{S}{R} \Rightarrow S = \alpha\,\text{R}$$

Assim, se queremos encontrar o comprimento de um arco que subtende um determinado ângulo central, a medida deste ângulo deve estar expressa em radiano para se usar a fórmula acima.

3) Como um semicírculo é um arco que subtende um ângulo de 180° e o seu comprimento é $S = \pi R$, temos que $\frac{\pi\,\text{R}}{R} rad = 180^\circ$, ou seja ,

$\boxed{\pi\, rd = 180^\circ}$ Além disso, $\boxed{1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \cong 57^\circ}$

Observações:

1) A medida do comprimento de um arco depende da unidade de comprimento considerada.

2) A medida de um ângulo em radiano não depende da unidade de comprimento considerada, desde que, obviamente, tomemos o comprimento do raio e do arco correspondentes nas mesmas unidades.

3) Quando R = 1, a medida do ângulo (e do arco correspondente) em radiano coincide com a do comprimento do arco.

5. O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO E A FUNÇÃO DE EULER

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um deles é escolhido e denominado positivo dizemos que o círculo está *orientado*. Tradicionalmente, em Matemática, escolhemos o sentido *anti-horário* como *positivo*.

Consideremos no sistema de coordenadas cartesianas o círculo com centro em (0,0) e raio 1, também chamado de círculo unitário, orientado. Fixemos no círculo unitário o ponto A(1,0), que será chamado de origem dos arcos. O círculo definido acima é chamado de *círculo trigonométrico* e será designado por S^1.

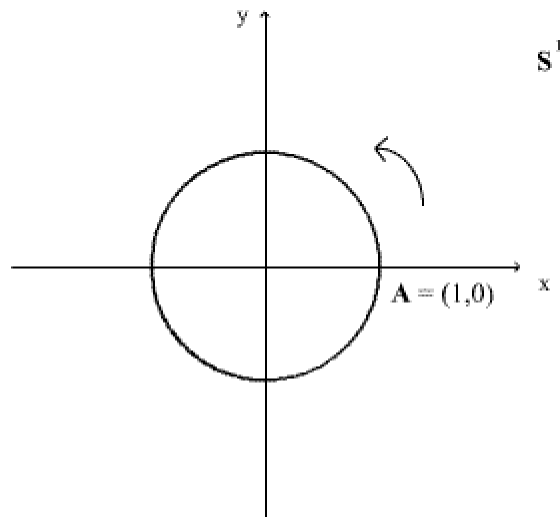


Figura 1

Definimos a *medida algébrica* de um arco AB de S^1 como sendo o comprimento deste arco associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for o anti-horário e negativo em caso contrário. Esta medida será representada por AB.

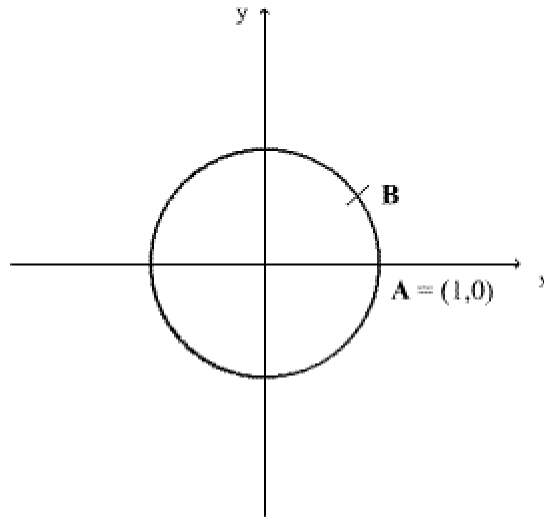


Figura 2

Observe que como S^1 tem raio unitário o módulo da medida algébrica de AB corresponde á medida do arco em radiano, ou seja, AB = |m AB| rad.

Vamos agora definir uma aplicação E de R em S^1, chamada de *função de Euler*, que associa a cada número real t um ponto P de S^1, chamado de *imagem* de t no círculo, da seguinte maneira:

$$E: R \rightarrow S^1$$
$$t \rightarrow E(t) = P = (x,y)$$

Tal que,

1) Se t = 0 então P = A, isto é, E(0) = A.

2) Se t > 0 realizamos um percurso de comprimento t a partir de A, no sentido anti-horário e marcamos P = E(t) como ponto final deste percurso , isto é m AP = t.

3) Se t < 0 então realizamos a partir de A um percurso de comprimento | t| no sentido horário e marcamos P = E(t) como ponto final deste percurso, isto é mAP = t.

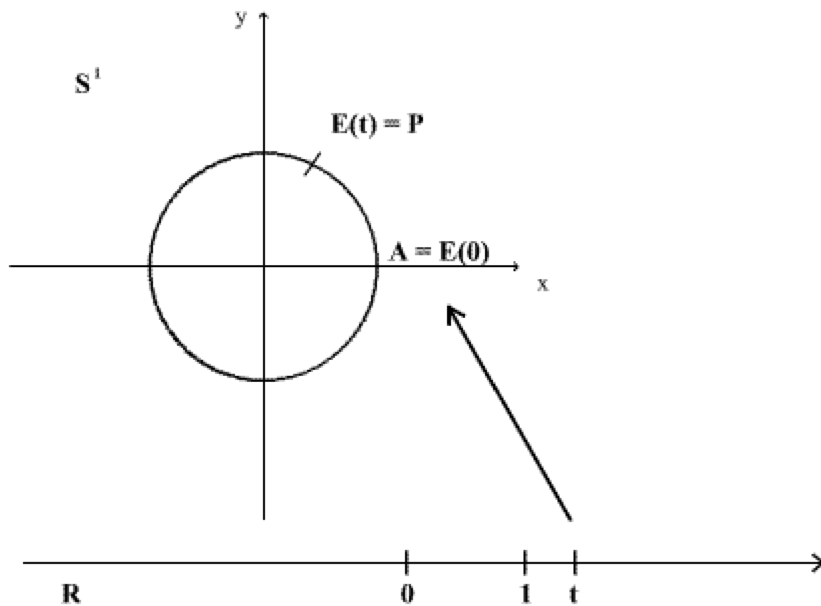


Figura 3

Exemplo:

Dado o círculo trigonométrico abaixo (Figura 4), temos :

$E(0) = A$, $E(\pi/2) = B$, $E(\pi) = A'$ e $E(-\pi/2) = E(3\pi/2) = B'$

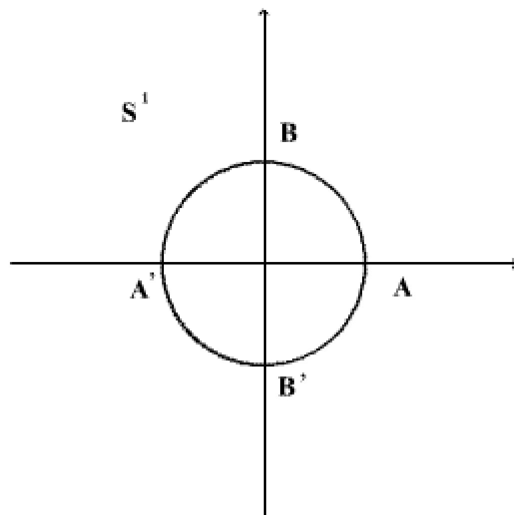


Figura 4

> ➪ A função de Euler consiste em envolver a reta R, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in R$ coincida com o ponto A de S^1.

Da correspondência feita até aqui entre os números reais e os pontos do círculo trigonométrico, se considerarmos o arco AP até uma volta, temos que mAP = t e $-2\pi \le t \le -2\pi$. Podemos , no entanto, estender a noção de medida para arcos com mais de uma volta, considerando $|t| > 2\pi$.

Seja P = E(t) com $t \in R$, o arco AP e conseqüentemente o ângulo $A\hat{O}P$ mede t radianos (Figura 5) **.**

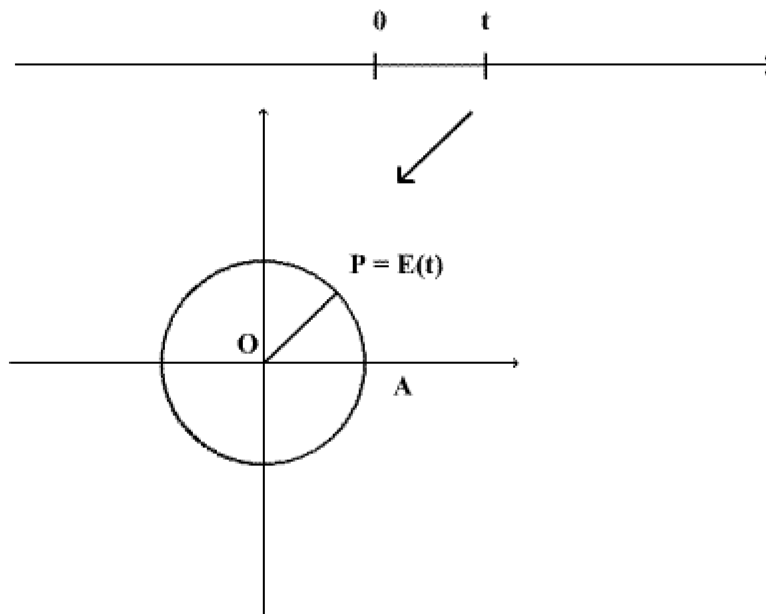


Figura 5

A função de Euler não é uma função injetora, isto é, a números reais distintos podem estar associados ao mesmo ponto no círculo trigonométrico. Por exemplo, $E(-\pi/2) = E(3\pi/2)$. Mais geralmente, tomando $t_1 > 0$ e $mAP = t_1$, associados a P existem dois arcos com medidas e sentidos diferentes. Se $mAP = t_1$ (no sentido anti-horário) e $mAP = t_2$ (no sentido horário), ou seja $t_2 < 0$, temos que : $t_1 - t_2 = 2\pi$ e $E(t_1) = E(t_2) = P$.

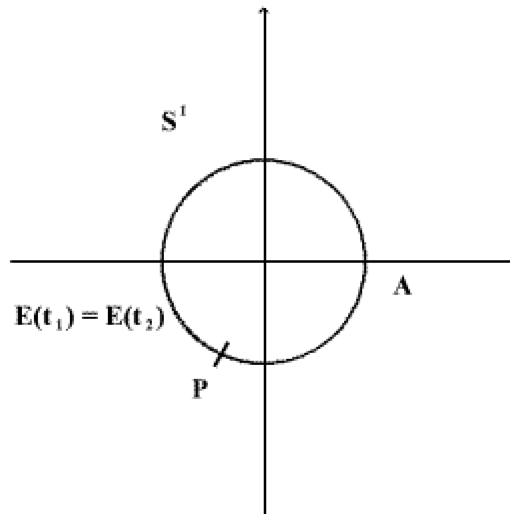


Figura 6

Se P é a imagem de t_o, P será também a imagem de $t_o \pm 2\pi$, $t_o \pm 4\pi$, etc..., ou seja, P é a imagem de todos os elementos do conjunto $\{t \in R \; ; \; t = t_o + 2k\pi, \; k \in Z\}$.

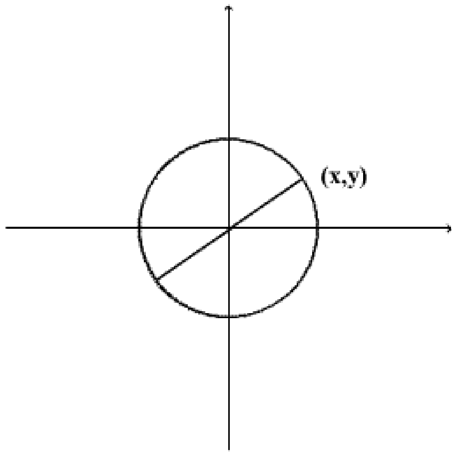
Dizemos, neste caso, que $t_o + 2k\pi$ são as várias "determinações" do arco AP, ou seja, todos os arco da forma $t_o + 2k\pi$ são *côngruos*, isto é, a diferença entre eles é um múltiplo de 2π. De fato:

$t_1 = t_o + 2k_1\pi$ e $t_2 = t_o + 2k_2\pi$ $k_1, k_2 \in Z$ têm a mesma imagem em S^1 se e somente se $t_1 - t_2 = 2k\pi$, $(k = k_1 - k_2)$

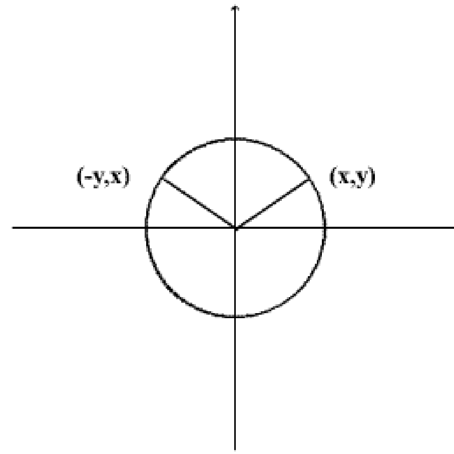
As vezes para facilitar a linguagem dizemos que t (número real) pertence ao 1º Quadrante. Estamos querendo dizer com isso que a extremidade P do arco AP tal que mAP = t é que pertence ao 1º Quadrante .

Finalmente, observando as figuras a seguir, obteremos diversas simetrias da função de Euler. Estas simetrias serão utilizadas para mostrar várias propriedades das funções seno e cosseno.

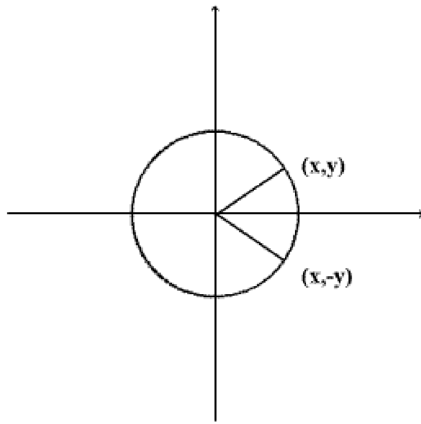
Dado $t \in R$, seja $P = E(t) = (x,y)$



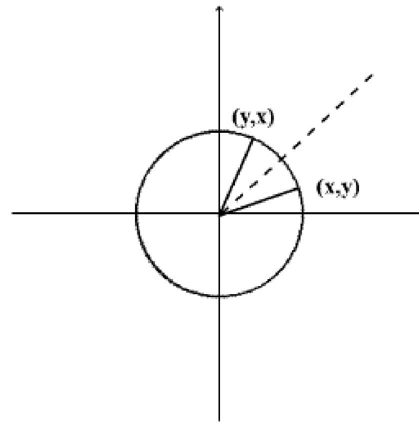
$E(t+\pi) = (-x,-y)$



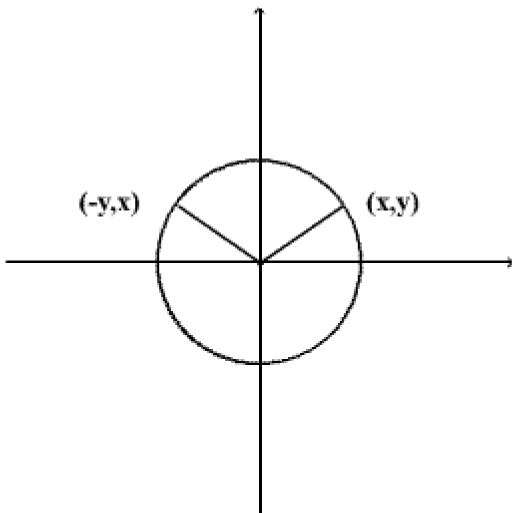
$E(t+\frac{\pi}{2}) = (-y, x)$



$E(-t) = (x,-y)$



$E(\frac{\pi}{2}-t) = (y, x)$



$E(\pi - t) = (-x, y)$

Figura 7

6. EXTENSÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos agora estender a noção de seno, cosseno e tangente , já conhecidas no triângulo retângulo, e portanto, para ângulos agudos, para ângulos e arcos quaisquer.

Dado um número real $t \in R$, seja $P = E(t) = (x,y)$ a sua imagem no círculo trigonométrico. Definimos *cosseno de t* e *seno de t*, respectivamente, como sendo *a abscissa* e a *ordenada de E(t)*. Isto é, $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, para todo $t \in R$.

Assim, podemos definir as funções:

$$f_1: R \to R \qquad\qquad f_2: R \to R$$
$$t \to \cos t \qquad\qquad t \to \text{sen } t$$

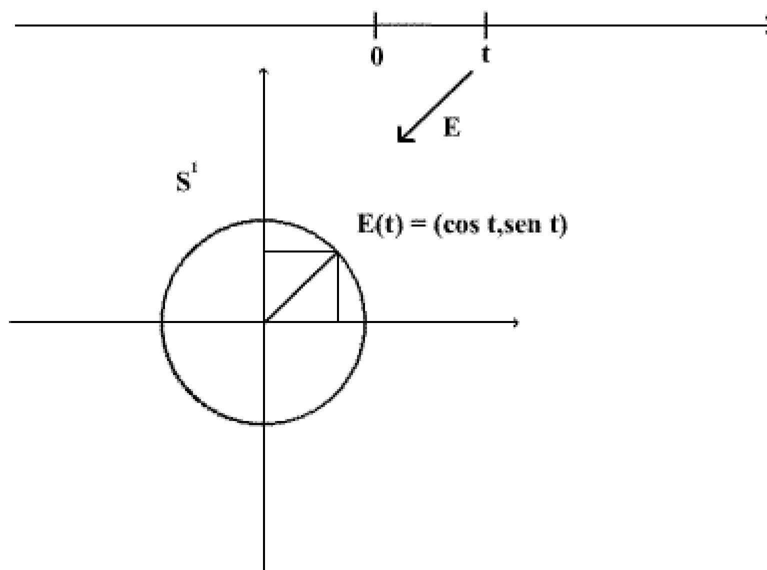


Figura 1

Mostra-se (veja figura 1) que a definição dada para o seno e cosseno de um número real qualquer coincide com a que tínhamos para um ângulo agudo. Como, para todo $t \in R$, temos $E(t) = (\cos t, \text{sen } t) \in S^1$, temos

$$\boxed{\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1}$$

ou seja, a relação fundamental está preservada.

Além disso,

$\cos 0° = \cos 0 = 1$ — $\text{sen}\ 0^o = \text{sen}\ 0 = 0$

$\cos 90° = \cos \pi/2 = 0$ — $\text{sen}\ 90° = \text{sen}\ \pi/2 = 1$

$\cos 180° = \cos\pi = -1$ — $\text{sen}\ 180° = \text{sen}\pi = 0$

$\cos 270° = \cos 3\pi/2 = 0$ — $\text{sen}\ 270° = \text{sen}\ 3\pi/2 = -1$

> ➩ A partir das definições dadas e da análise no circulo S^1 podemos deduzir todas as propriedades das funções sen t e cos t.

1. Domínio

- O domínio das funções sen t e cos t é R e a imagem é [-1,1].

2. Sinal das funções

- sen t > 0, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $2^{\underline{o}}$ quadrantes e sen t < 0, se $t \in 3^o$ e 4° quadrantes.
- cos t > 0, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes e cos t < 0, se $t \in 2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- y = sen t é crescente no $1^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ quadrantes e decrescente no $2^{\underline{0}}$ e $3^{\underline{0}}$ quadrantes,
- a função y = cos t é decrescente no $1^{\underline{0}}$ e $2^{\underline{0}}$ quadrantes e crescente no $3^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ quadrantes.

4. Paridade

Para todo $t \in R$, temos $E(t) = (\cos t, \text{sen}\ t)$ e $E(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$. Vimos anteriormente que se $E(t) = (x, y)$ então $E(-t) = (x, -y)$. Logo, para todo $t \in R$, tem-se

- $\cos(-t) = \cos t$. Isto é, a função cosseno é uma função par.
- $\text{sen}(-t) = -\ \text{sen}\ t$. Isto é, a função seno é uma função ímpar.

5. Periodicidade

> ➪ Uma função f: R → R é dita *periódica* quando existe um número T não nulo tal que f(t + T) = f(t) para todo t ∈ R. Quando isto ocorre, então f(t + kT) = f(t) para todo t ∈ R e todo k ∈ Z. O menor número positivo tal que f(t + T) = f(t) para todo t ∈ R é chamado de *período* da função f

As funções seno e cosseno são periódicas.

De fato, para $t \in R$, seja $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$. Como $E(t) = E(t + 2k\pi)$, para todo $k \in Z$, temos que $(\cos t, \text{sen } t) = (\cos(t + 2k\pi), \text{sen}(t + 2k\pi))$. Portanto, conhecendo-se o comportamento de sen t e cos t no intervalo $[0,2\pi]$ passamos a conhecer imediatamente o seu comportamento em todos os pontos de R.

A seguir temos os gráficos das funções seno e cosseno. O gráfico da função sen t é chamado de *senóide* (Figura 2) e como podemos verificar o gráfico de cos t (Figura 3) é apenas uma translação do gráfico de sen t.

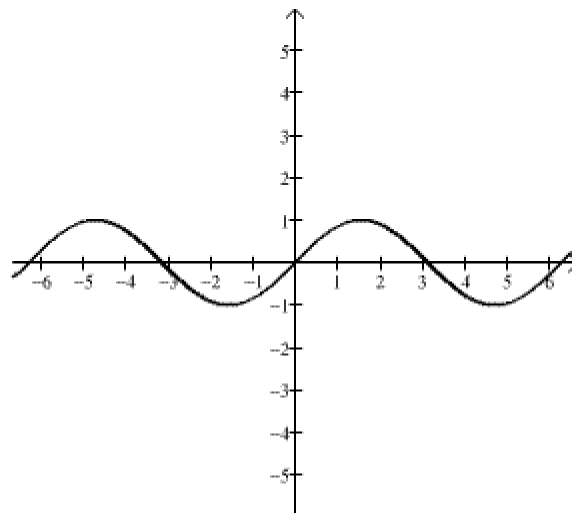


Figura 2

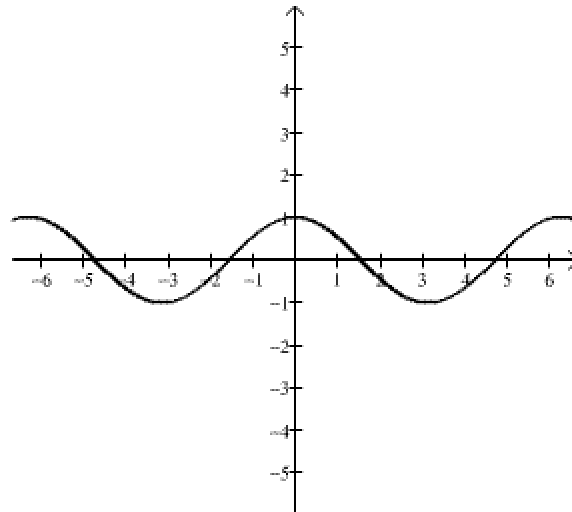


Figura 3

As relações obtidas no final da seção 5 (Figura 7) mostram que, para todo $t \in R$, valem:

$\cos(t + \pi) = -\cos t$,	$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen } t$
$\cos(t + \pi/2) = -\text{ sen } t$,	$\text{sen}(t + \pi/2) = \cos t$
$\cos(\pi/2 - t) = \text{sen } t$,	$\text{sen}(\pi/2 - t) = \cos t$
$\cos(\pi - t) = -\cos t$,	$\text{sen}(\pi - t) = \text{sen } t$

Quando definimos a tangente de um ângulo num triângulo retângulo (Figura 1), definimos:

$$\text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \text{tg}\hat{B} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

Demos, portanto, uma definição algébrica e outra geométrica. O mesmo acontece quando definimos para arcos e ângulos quaisquer. Começaremos com a definição geométrica.

Dado $t \in R$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Considere a reta $0P$ e seja T a sua interseção com a reta tangente a S^1 em A (Figura 4). Definimos *tangente* de t como sendo

a medida algébrica do segmento AT, ou em outras palavras, a ordenada de T no sistema cartesiano.

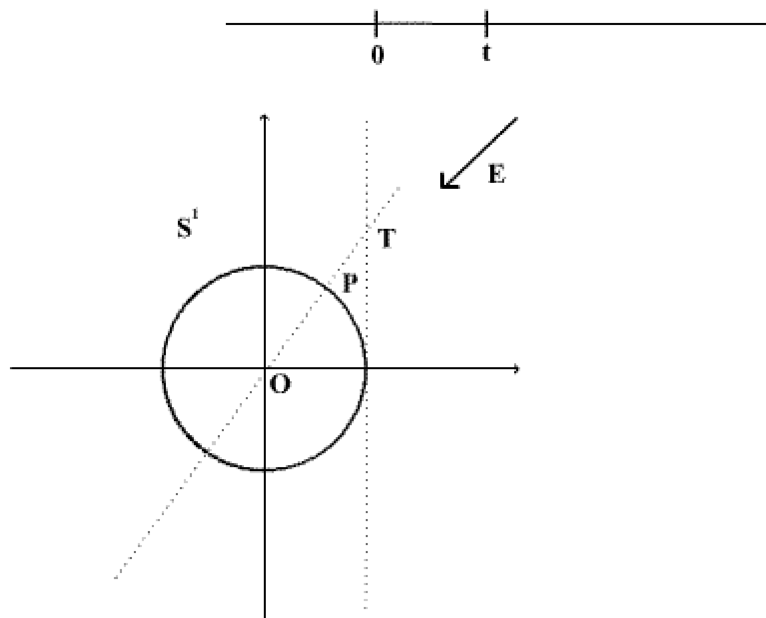


Figura 4

Do mesmo modo, como definimos as funções reais sen t e cos t, podemos definir:

$$f: \left\{ t \in R \; ; \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \; k \in Z \right\} \rightarrow R, \quad \text{onde } f(t) = \text{tg } t.$$

Observemos que, para $t = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(\pi/2)$ ou $P = E(t) = E(3\pi/2)$, logo a reta 0P fica paralela a reta tangente a S^1 em A. Neste caso, não existe ponto T, portanto a tg t não está definida.

A partir da interpretação geométrica da tangente e da análise no círculo S^1 podemos deduzir todas as propriedades da função tangente.

1. Imagem

- A imagem da função tangente é R.

2. Sinal da função

- $\text{tg } t > 0$, se $t \in 1^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.
- $\text{tg } t < 0$, se $t \in 2^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

3. Crescimento

- A função tg t é crescente em todos os intervalos da forma ($k\pi - \pi/2$, $k\pi + \pi/2$).

4. Paridade

- A função tg t é ímpar
- 5. Periodicidade

A função tg t é periódica de período π: $tg(t + \pi) = tg\ t$.Com as informações obtidas construímos o gráfico da função tangente:

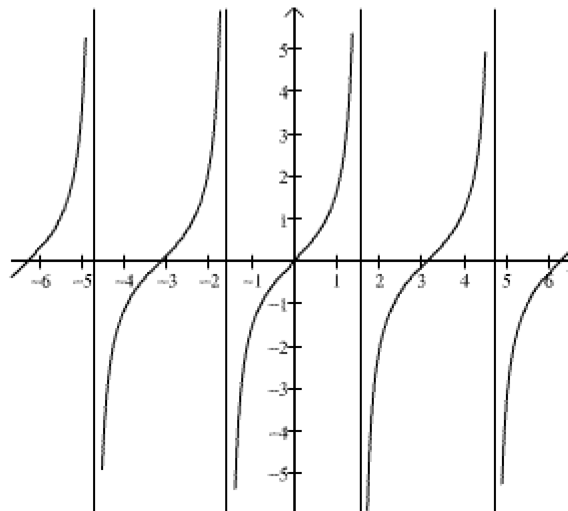


Figura 5

Mostraremos agora, que esta definição dada para tangente é igual a $tg\ t = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$, para $cos\ t \neq 0$, ou seja, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in Z$. De fato, se $x = k\,\pi$, temos $tg\ t = 0 = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$ se $t \neq k\pi$ então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B', então temos que os triângulos $0PP_2$ e 0AT são semelhantes (Figura 6). Logo,

$$\frac{|AT|}{|0A|} = \frac{|P_2P|}{|0P_2|} \Leftrightarrow |tg\ t| = \frac{|sen\ t|}{|cos\ t|}$$

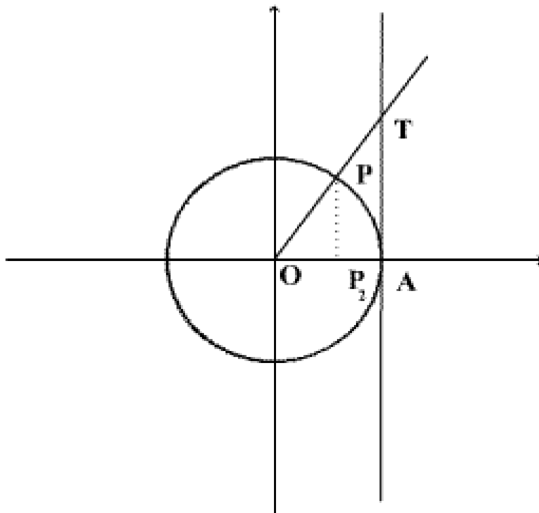


Figura 6

Analisando os sinais de tg t e $\frac{\text{sen t}}{\text{cos t}}$ nos quatro quadrantes concluímos a nossa afirmação.

As vezes é conveniente se introduzir funções trigonométricas auxiliares como as funções $\frac{1}{\text{sen t}}$, $\frac{1}{\text{cos t}}$, $\frac{\text{cos t}}{\text{sen t}}$, chamadas cossecante, secante e cotangente de t, respectivamente. Observe que como estas funções são definidas por meio de quocientes, logo os seus domínios são restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero. Todas estas funções também podem ser definidas geometricamente.

7. EXERCÍCIOS

1) Mostre que:

a) $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+tg^2 t}$ b) $sen^2 t = \dfrac{tg^2\ t}{1+tg^2 t}$.

2) Sabendo que $tg\ t = 5$, $0^0 < t < 90^0$, calcule $\cos t$ e $sen\ t$.

3) Considere um triângulo equilátero de lado 1, para calcular: sen 30^0, cos 30^0, tg 30^0, sen 60^0, cos 60^0 e tg 60^0.

4) Marque na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos de medidas dadas a seguir, onde $k \in Z$.

A) $x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$; B) $x = k\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ C) $x = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$

D) $x = \dfrac{2k\pi}{3}$ E) $x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ F) $x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$

5) Dados os conjuntos $E = \{ x \in R; x = k\pi/3 , k \in Z \}$, $F = \{x \in R; x = \pi/3 + k\pi/2, k \in Z\}$ e $G = \{ x \in R; x = 2k\pi/3, k \in Z \}$, determine e represente na circunferência trigonométrica:

A) $E \cap F$; B) $E \cap F \cap G$; C) $F - E$.

6) Diga se é verdadeiro ou falso:

A) $sen\ 2 > 0$ B) $\cos 4 < 0$ C) $sen\ 3 > sen\ 2$ D) $\cos\pi/4 > \cos 1$ E) $tg\ 5 > tg\ 6$.

7) Sendo $\operatorname{tg} t = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$, $a > b > 0$ e $\cos t < 0$, calcule as demais funções trigonométricas de t.

8) Prove a identidade:

A) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 2\cos^2 x - 1$

9) Calcule:

A) $tg1935^\circ$ B) $\operatorname{sen} 3000^\circ$ C) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$ D) $\dfrac{\cos 765^\circ - \operatorname{sen} 1395^\circ}{tg1410^\circ}$

10) Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

A) $f(x) = -2-\cos x$; B) $f(x) = 1 + 4\operatorname{sen}(x + \pi/3)$; C) $f(x)=\operatorname{cotg}(x - \pi/5)$.

11) Se f é uma função periódica de período T então a função $g(t) = m + n\, f(at + b)$,a, b, m e n $\in$ R e a e n são não nulos, é periódica com período $\dfrac{T}{|a|}$. Use este fato para determinar o período das seguintes funções:

A) $f(t) = 3 - \operatorname{sen} 4t$; B) $f(t) = 1 + 2\cos(t/2)$; C) $f(t) = \operatorname{tg}(t + \pi)$.

12) Verifique a paridade das seguintes funções:

A) $f(t) = t^3 \cos t$; B) $f(t) = t\, \operatorname{tg} t$;

13) Esboce o gráfico das funções definidas pelas seguintes sentenças, indicando domínio e imagem:

A) $f(t) = 2 + \cos t$; B) $f(t) = \operatorname{sen}(t + \pi/4)$; C) $f(t) = \operatorname{tg}(t - \pi/4)$;

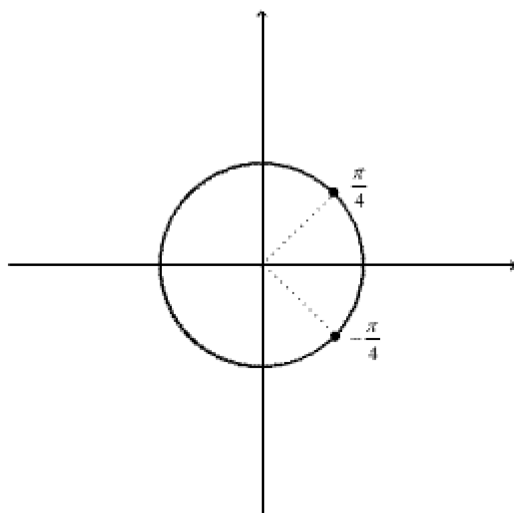
D) $f(t) = \operatorname{sen}(t/2)$; E) $f(t) = -3\cos t$; F) $f(t) = |\operatorname{sen} t|$;

G) $f(t) = 1 + \text{sen } 2t$.

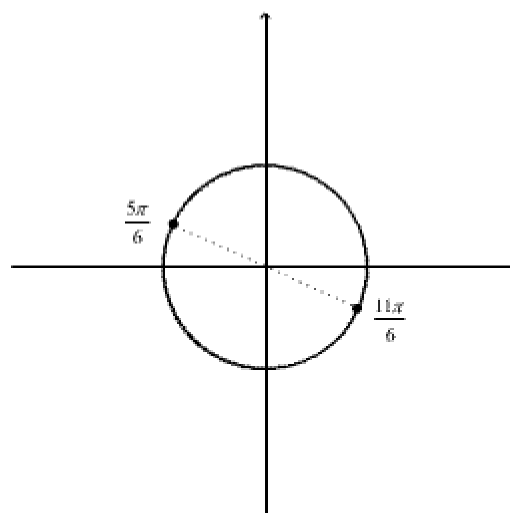
RESPOSTAS

2) $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$ e $\text{sen } t = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

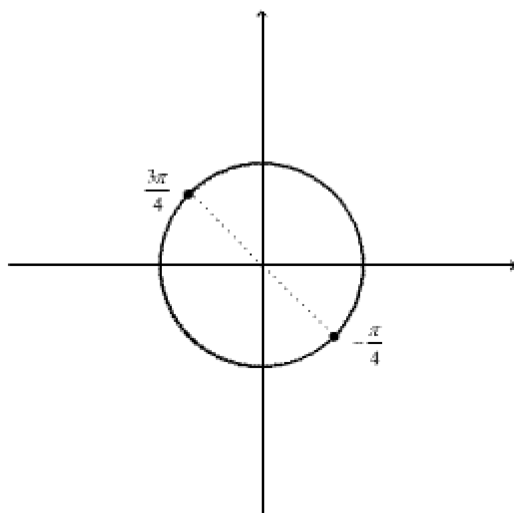
4A)



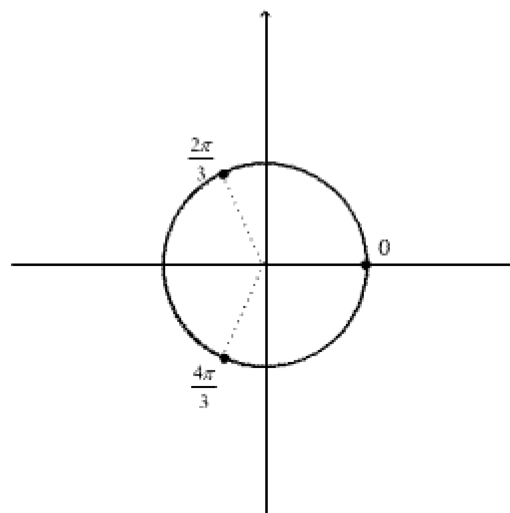
4B)



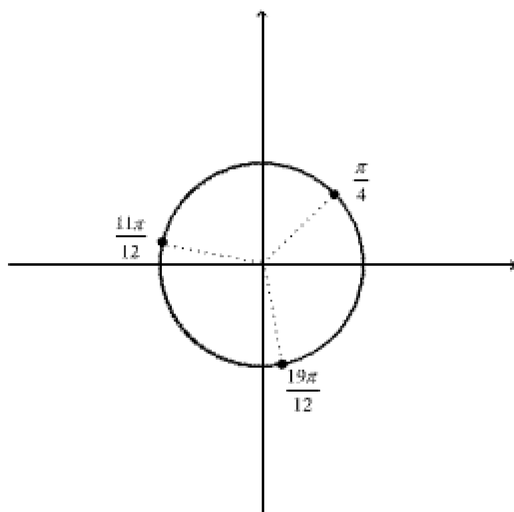
4C)



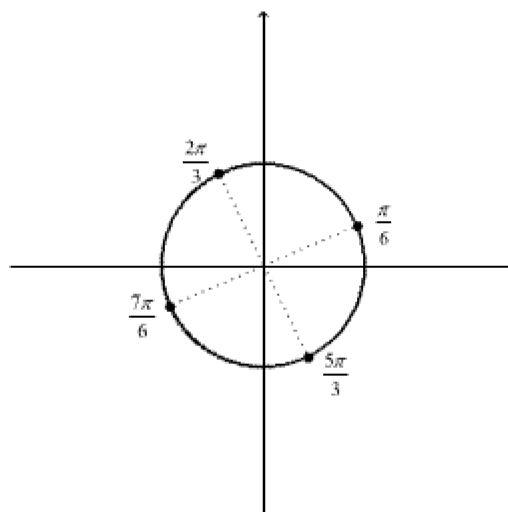
4D)



4F)

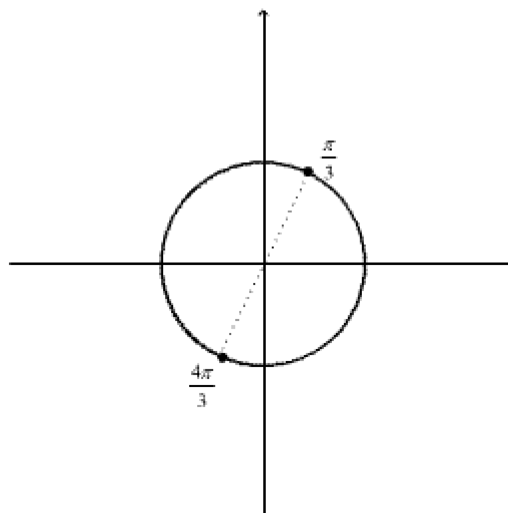


4G)



5A)

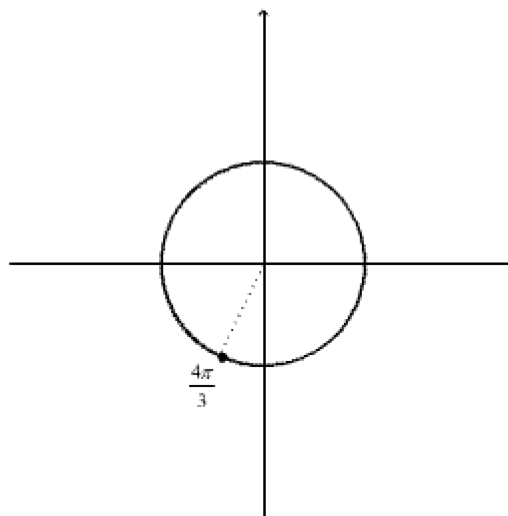
$$E \cap F = \left\{ x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \ \ k \in Z \right\}$$



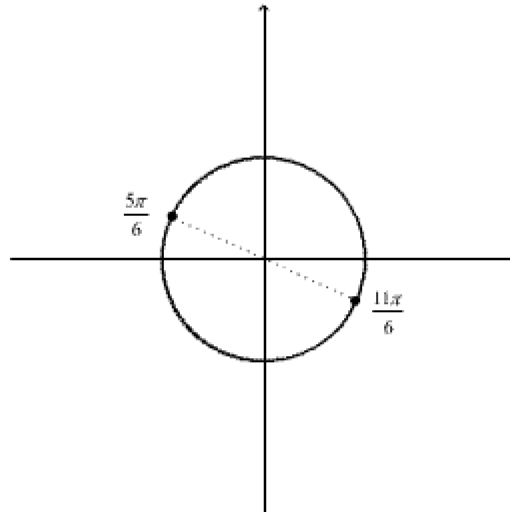
5B)

$$E \cap F \cap G =$$

$$\left\{ x \in R, \ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ e } k \in Z \right\}$$



5C)



$$F - E = \left\{x \in R,\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad e \quad k \in Z\right\}$$

6) A) V B) V C) F D) V E) F

9) A) -1 B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C) 1 D) 1 E) - $\sqrt{6}$

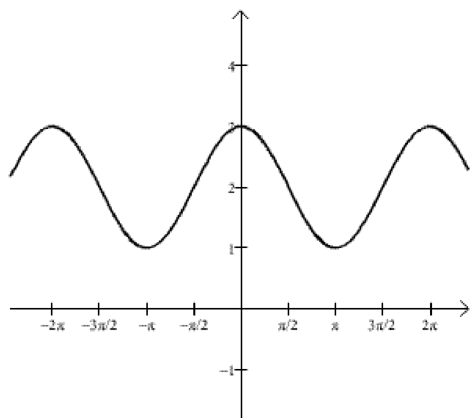
10) A) D = R e Im = [-3, -1] B) D = R e Im = [-3, 5]

C) $D = \left\{x \in R; x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi\right\}$

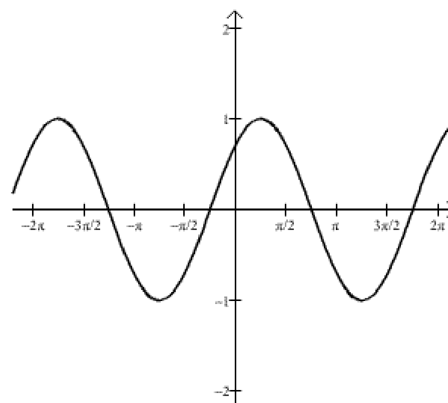
11) A) $\pi/2$ B) 4π C) π

12) A) ímpar B) par C) par

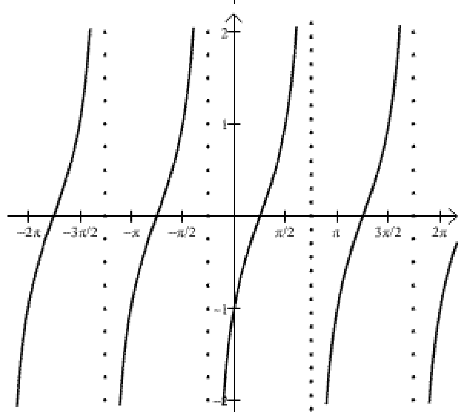
13A)



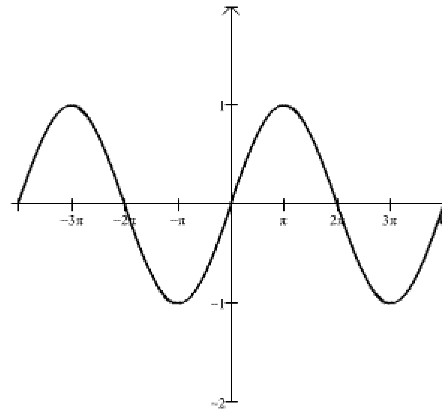
13B)



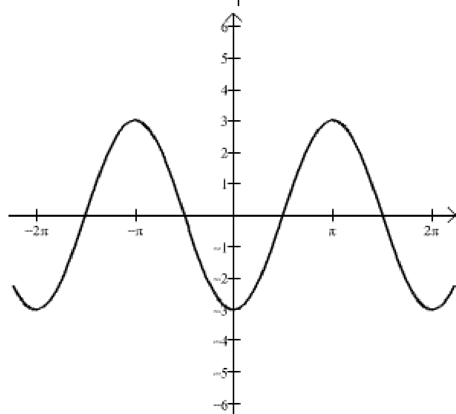
13C)



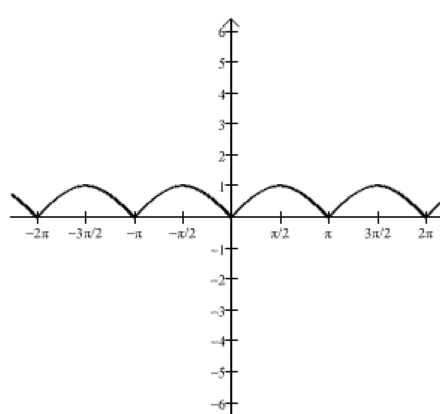
13D)



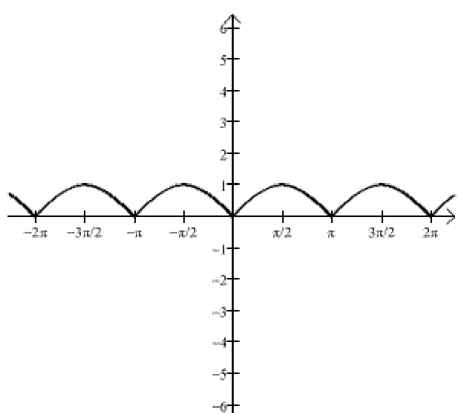
13E)



13F)



13G)



8. AS FÓRMULAS DA ADIÇÃO DE DOIS ARCOS.

Vamos considerar fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e diferença de dois arcos quando são dadas as funções trigonométricas desses arcos.

Usaremos a fórmula da distância de dois pontos $P = (x_1 , y_1)$ e $Q = (x_2 , y_2)$ do plano,

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

que segue imediatamente do teorema de Pitágoras (Figura 1).

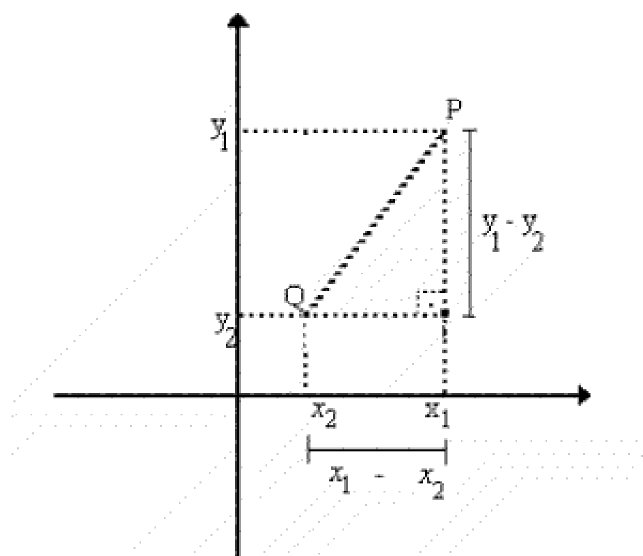


Figura 1

Deduziremos a seguir que

$$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b)$$
$$\text{para quaisquer números reais } a \text{ e } b \qquad (1)$$

Considerando no círculo trigonométrico, o ponto $A = (1,0)$ e $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ tais que $P = (\cos(a), \operatorname{sen}(a))$ e $Q = (\cos(b), \operatorname{sen}(b))$ (Figura 2). Temos que

$$[\mathrm{d}\,(P, Q)]^2 = (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b))^2 =$$

$$= [(\cos(a))^2 + (\operatorname{sen}(a))^2] + [(\cos(b))^2 + (\operatorname{sen}(b))^2] - 2\cos(a).\cos(b) - 2\operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b).$$

Segue da relação fundamental da trigonometria que

$$[\mathrm{d}\,(P, Q)]^2 = 2 - 2[\cos(a).\cos(b) + \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}(b)].$$

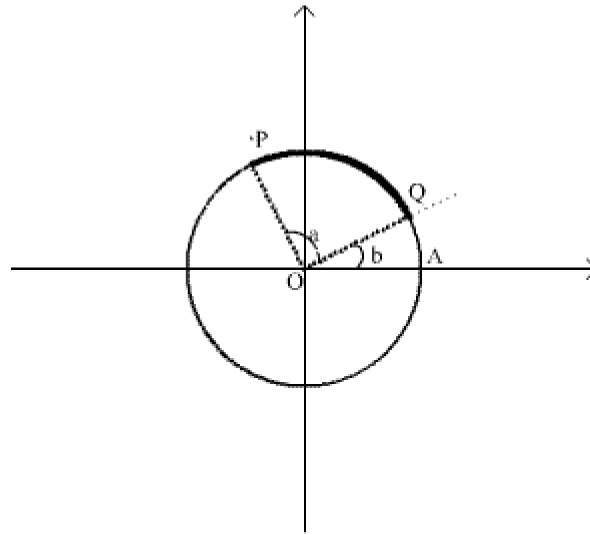


Figura 2

Vamos usar um novo sistema de eixos coordenados x'Oy': Mantendo a origem e girando os eixos de ângulo b (Figura 3). Neste novo sistema temos $Q = (1,0)$ e $P =$ (cos(a-b), sen(a-b)). Usando estas coordenadas para calcular a distância de P a Q obtemos

$$[\mathrm{d}\,(P, Q)]^2 = (\cos(a-b) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(a-b))^2 =$$

$$= [(\cos(a-b))^2 + \operatorname{sen}(a-b))^2] + 1 - 2\cos(a-b).$$

Donde

$$[\mathrm{d}\,(P, Q)]^2 = 2 - 2\cos(a-b).$$

Das duas expressões obtidas para $[d(P, Q)]^2$ extraímos que

$$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b).$$

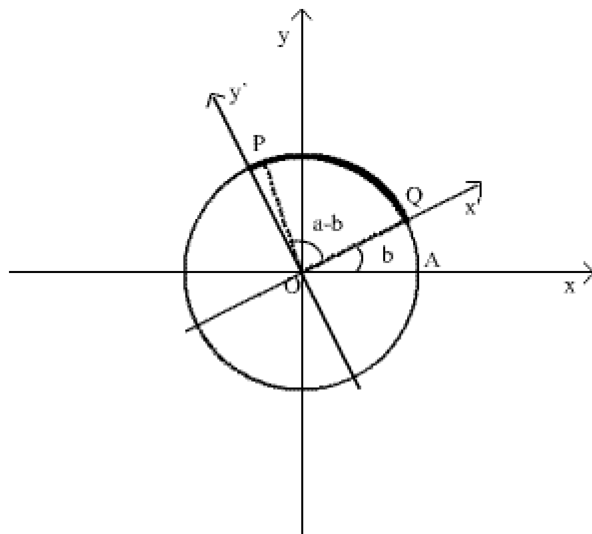


Figura 3

Exemplo:

Calculemos $\cos(15^o)$.

$$\cos(15^o) = \cos(45^o - 30^o) = \cos(45^o).\cos(30^o) + \text{sen}(45^o).\text{sen}(30^o) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore \quad \cos(15^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Exercícios:

Nesta seção de exercícios deduziremos, juntamente com o leitor, algumas fórmulas que decorrem de (1).

1) a) Usando (1)①, deduza que

cos (a+ b) = cos (a).cos (b) - sen (a).sen (b)
para quaisquer números reais a e b

② (2)

Sugestão: Inicialmente escreva que cos(a + b) = cos(a - (-b)) e aplique (1). Conclua, usando que cos(-b) = cos(b) e sen(-b) = - sen(b).

b) Calcule cos(75º), usando (2).

2) Usando (1), deduza que

sen (a+ b) = sen (a).cos (b) + sen (b).cos (a)
para quaisquer números reais a e b

(3)

Sugestão: Inicialmente use que sen(a+ b) = $\cos(\pi/2-(a+b))=\cos((\pi/2-a)-b)$ e aplique (1). Conclua, usando que $\cos(\pi/2-a)=\text{sen}(a)$ e $\text{sen}(\pi/2-a)=\cos(a)$.

3) a) Usando (3), deduza que

sen (a - b) = sen (a).cos (b) - sen (b).cos (a)
para quaisquer números reais a e b

④ (4)

Sugestão: Faça de modo análogo à dedução de (2)②, isto é, aplique a sen(a - b) = sen(a + (-b)).

b) Se sen(a) = 4/5 e cos(b) = 3/5, sendo a um arco do 2º quadrante e b um arco do 1º quadrante, calcule sen(a -b).

4) Usando (2) e (3) , deduza que, para quisquer números reais a e b tais que a, b e $a + b$ são todos diferentes de $\pi / 2 + k\pi$; para todo $k \in Z$, temos

$$tg(a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a).tg(b)} \quad ⑤ \quad (5)$$

Sugestão: Inicialmente use que $tg(a+b) = \dfrac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$ e aplique (2) e (3)③ ao denominador e numerador respectivamente. Em seguida divida o numerador e denominador por cos(a).cos(b).

Usando as fórmulas vistas podemos obter as funções trigonométricas de a quando são conhecidas as funções trigonométricas de a/2.

5) a) Deduza as fórmulas (6) e (7) a seguir, usando respectivamente (2) e (3).

$$\cos(a) = \cos^2(a/2) - \text{sen}^2(a/2) \quad (6)$$

para qualquer número real a ⑥

$$\text{sen}(a) = 2.\text{sen}(a/2).\cos(a/2) \quad (7)$$

para qualquer número real a ⑦

Sugestão: Use que $a = a/2 + a/2$

b) Se sen(a) = 1/3 , calcule sen(2a) e cos(2a).

A partir das últimas fórmulas vistas podemos apresentar as funções trigonométricas de um arco a como função de tg (a/2).

6) a) Deduza as fórmulas (8), (9) e (10) a seguir usando as fórmulas (6) e (7).

$$\cos(a) = \frac{1 - tg^2(a/2)}{1 + tg^2(a/2)} \qquad \text{para} \quad a \neq \pi + 2k\pi \qquad (8)⑧$$

Sugestão: Use (6) e a relação fundamental para escrever que $\cos(a) = \dfrac{\cos^2(a/2) - \text{sen}^2(a/2)}{\cos^2(a/2) + \text{sen}^2(a/2)}$, em seguida divida os termos do quociente por $\cos^2(a/2)$.

$$\text{sen}(a) = \frac{2tg(a/2)}{1 + tg^2(a/2)} \qquad \text{para} \quad a \neq \pi + 2k\pi \qquad (9)$$

⑨

Sugestão: Use (7)⑦ e a relação fundamental para escrever que $\text{sen}(a) = \dfrac{2\,\text{sen}(a/2).\cos(a/2)}{\cos^2(a/2) + \text{sen}^2(a/2)}$, em seguida divida os termos do quociente por

$\cos^2(a/2)$.

$$tg(a) = \frac{2tg(a/2)}{1-(tg(a/2))^2}$$
para $a \neq \pi/2 + k\pi$ e $a \neq \pi + 2k\pi$ (10)

Sugestão: Use que $tg(a) = \dfrac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$ e as fórmulas (8) e (9).

Temos ainda as fórmulas seguintes que transformam produto em soma e que são válidas para quaisquer números reais a e b.

7) a) Deduza as fórmulas a seguir usando (1) e (2)②

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad (11)$$

Sugestão: Some as equações:

$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b)$

$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a).\text{sen}(b)$.

$$\text{sen}(a).\text{sen}(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \qquad (12)$$

Sugestão: Subtraia as equações acima.

b) Deduza a fórmula a seguir usando (3) e (4)

$$\boxed{\operatorname{sen}(a).\cos(b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}} \qquad (13)$$

Sugestão: Some as equações

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) + \operatorname{sen}(\mathrm{b}).\cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) - \operatorname{sen}(\mathrm{b}).\cos(a)$$

9. EXERCÍCIOS

1) Para todo triângulo não retângulo ABC provar que,

$$\text{tg}(\hat{A}) + \text{tg}(\hat{B}) + \text{tg}(\hat{C}) = \text{tg}(\hat{A}) \,.\, \text{tg}(\hat{B}).\, \text{tg}(\hat{C}).$$

Sugestão: Use que $\text{tg}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \text{tg}(180^{o})$ e aplique ⑤.

2) Mostre que num triângulo ABC tal que $\hat{A}$ é obtuso tem-se $\text{tg}(\hat{B}).\, \text{tg}(\hat{C}) < 1$.

3) a) Fazendo ⑬ em $a + b = x$ e $a - b = y$ obtenha a fórmula

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 2.\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

b) Mostre que $\text{sen}(20^{o}) + \text{sen}(40^{o}) = \text{sen}(80^{o})$.

c) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x) = \cos(x) + \text{sen}(x)$.

4) Use ⑬ para calcular $y = \text{sen}(10^{o}).\cos(20^{o}).\cos(40^{o})$.

Lembre-se: $\cos(40^{o}) = \text{sen}(50^{o})$.

5) Esboce o gráfico da função $f(x)$:

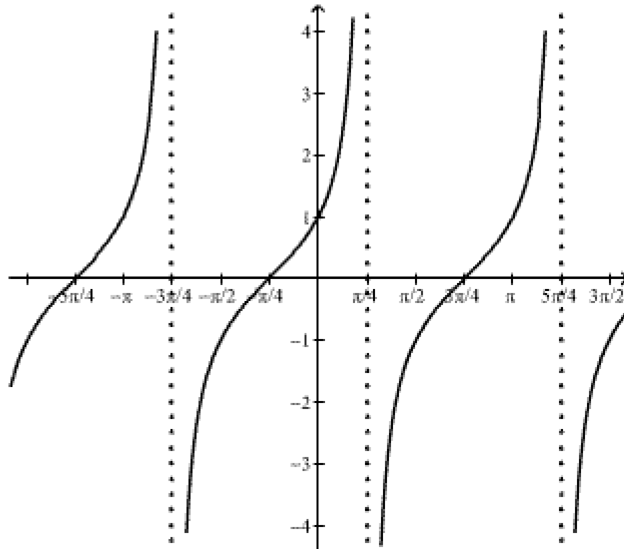
a) $f(x) = \dfrac{tg(x)+1}{1-tg(x)}$.

b) $f(x) = \text{sen}(x).\cos(x)$.

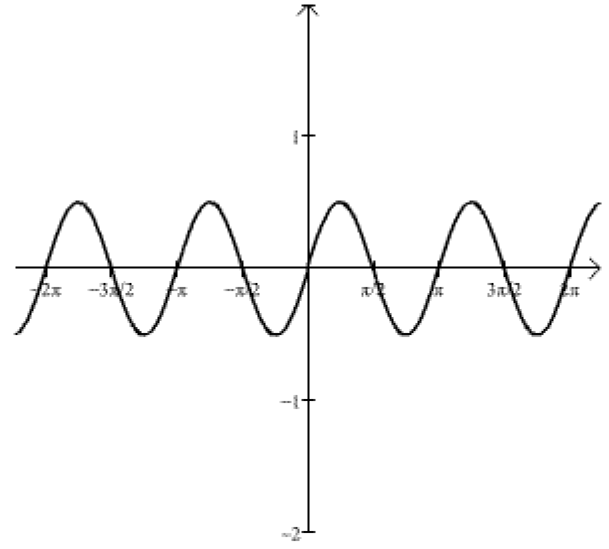
RESPOSTAS

3) c) Mínimo: $-\sqrt{2}$; Máximo: $\sqrt{2}$.

5a)



5b)



10. OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um triângulo retângulo ABC e seja t um dos seus ângulos agudos.

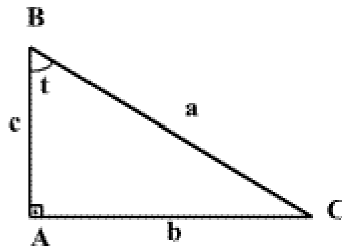


Figura 1

Relembremos que, sendo $0 < t < \pi/2$, temos

$$\text{tg } t = \frac{b}{c} \quad (= \text{cateto oposto} \div \text{cateto adjacente})$$

$$\cos t = \frac{c}{a} \quad (= \text{cateto adjacente} \div \text{hipotenusa})$$

$$\text{sen } t = \frac{b}{a} \quad (= \text{cateto oposto} \div \text{hipotenusa})$$

Considerando o inverso de cada uma destas razões definimos a cotangente, secante e cossecante de ângulos t, $0 < t < \pi/2$, como segue

$$\text{cotg } t = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{tg } t}$$

$$\sec t = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\text{cossec } t = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{sen } t}$$

Usando o círculo trigonométrico S^1, vamos estender as funções cotangente, secante e cossecante para ângulos e arcos quaisquer, lembrando a função de Euler E(t) definida anteriormente.

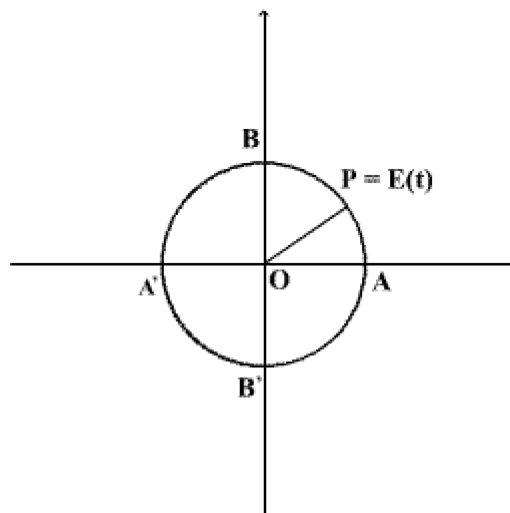


Figura 2

COTANGENTE

Dado $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, sejam $P = E(t)$ e C a interseção das retas OP e a tangente a S^1 no ponto $B(0,1)$.

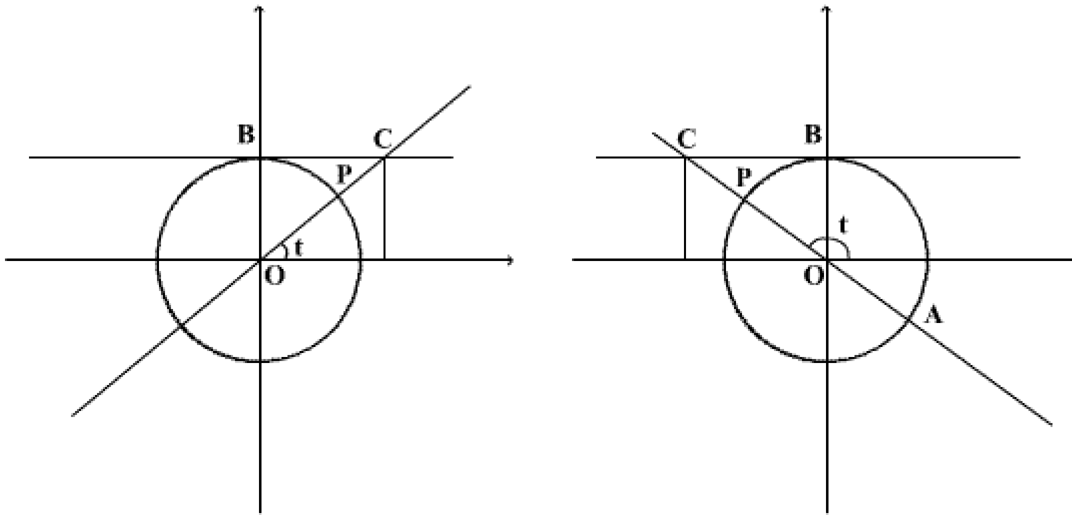


Figura 3

Definimos cotangente de t como sendo a medida algébrica do segmento BC, ou seja, a abscissa do ponto C no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$. Neste caso, a reta OP coincide com a reta OA e é paralela à tangente a S^1 em B. Logo, não existe o ponto de interseção C e, portanto, a cotangente não está definida.

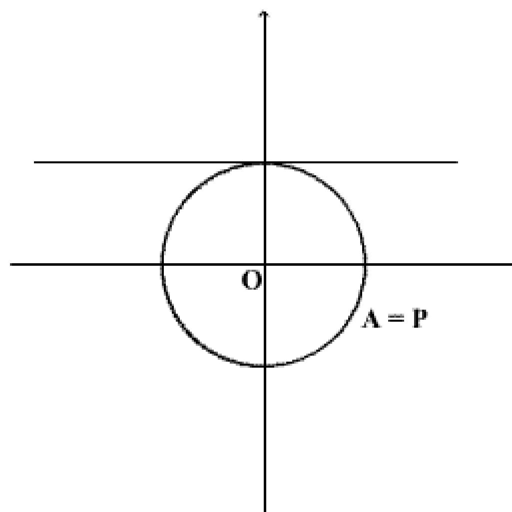


Figura 4

Função Cotangente

A função cotangente é a função f real de variável real, que associa a cada $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, o número $f(t) = \text{cotg } t$:

$$f: \{ t \in R; t \neq k\pi, k \in Z \} \longrightarrow R$$
$$t \longmapsto f(t) = \text{cotg } t$$

Propriedades da função cotangente

As seguintes propriedades podem ser verificadas facilmente a partir da definição e da análise no círculo S^1.

1. Imagem

- A imagem da função cotangente é R.

2. Sinal da função

- $\text{cotg } t > 0$, se t pertence ao 1° ou 3° quadrantes.
- $\text{cotg } t < 0$, se t pertence ao 2° ou 4° quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- A função cotangente é decrescente em todos os intervalos do tipo ($k\pi$, $k\pi+\pi$), $k\in Z$.

4. Paridade

A função cotangente é ímpar: cotg (-t) = - cotg t.

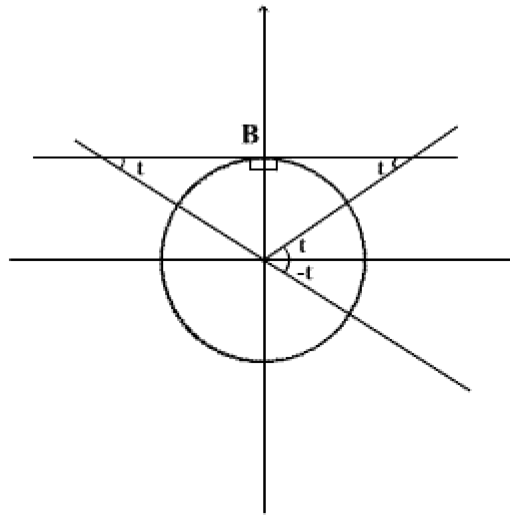


Figura 5

5. Periodicidade

- A função cotangente é periódica de período π: cotg $(t+\pi)$ = cotg t.

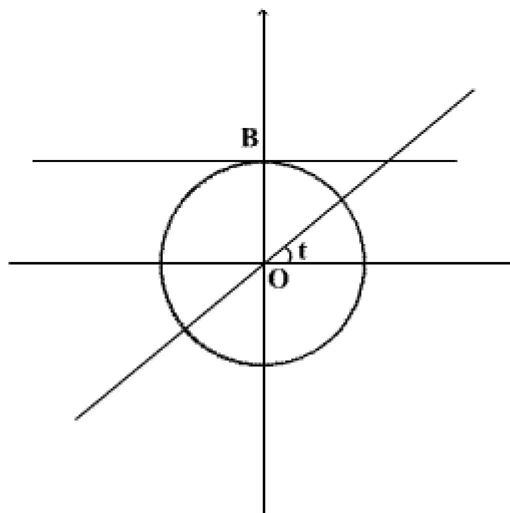


Figura 6

Gráfico

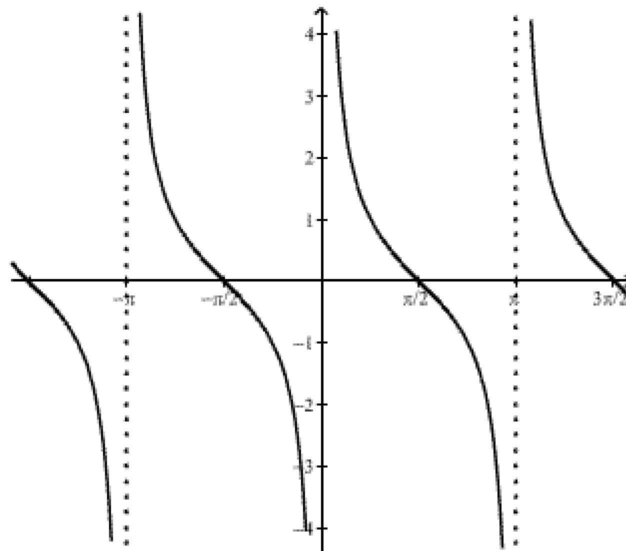


Figura 7

As retas $t = k\pi$, $k \in Z$, são chamadas assíntotas verticais do gráfico da função cotangente.

Mostraremos agora que a definição dada para cotangente é igual a $\text{cotg } t = \dfrac{\cos t}{\text{sen } t}$,

para $t \neq k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, temos $\text{cotg } t = 0 = \dfrac{\cos t}{\text{sen } t}$. Se $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$, então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B' (Figuras 2) e, portanto, temos os triângulos OPP_2 e OCB (Figuras 8), que são semelhantes.

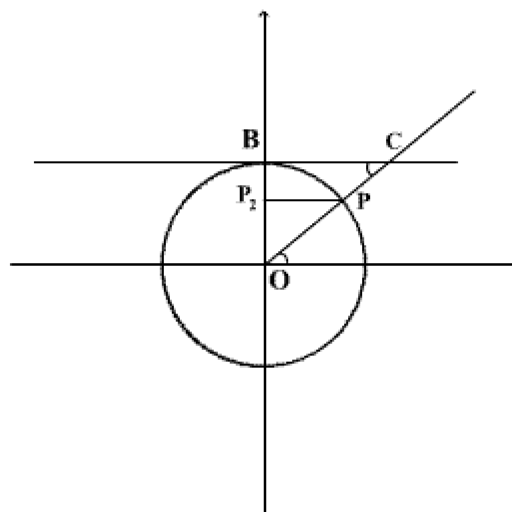


Figura 8

Usando a razão de semelhança, segue que $\frac{|BC|}{|OB|} = \frac{|PP_2|}{|OP_2|}$, ou seja, $\frac{|\cot g\ t|}{1} = \frac{|\cos t|}{|\text{sen}\ t|}$.

Analisando os sinais de cotg t e de $\frac{\cos t}{\text{sen}\ t}$ nos quatro quadrantes, concluímos que

$\text{cotg}\ t = \frac{\cos\ t}{\text{sen}\ t}$, $\forall\ t \neq k\pi,\ k \in Z$.

SECANTE

Dado $t \in R$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Consideremos a reta tangente a S^1 em P e seja S a sua interseção com a reta OA.

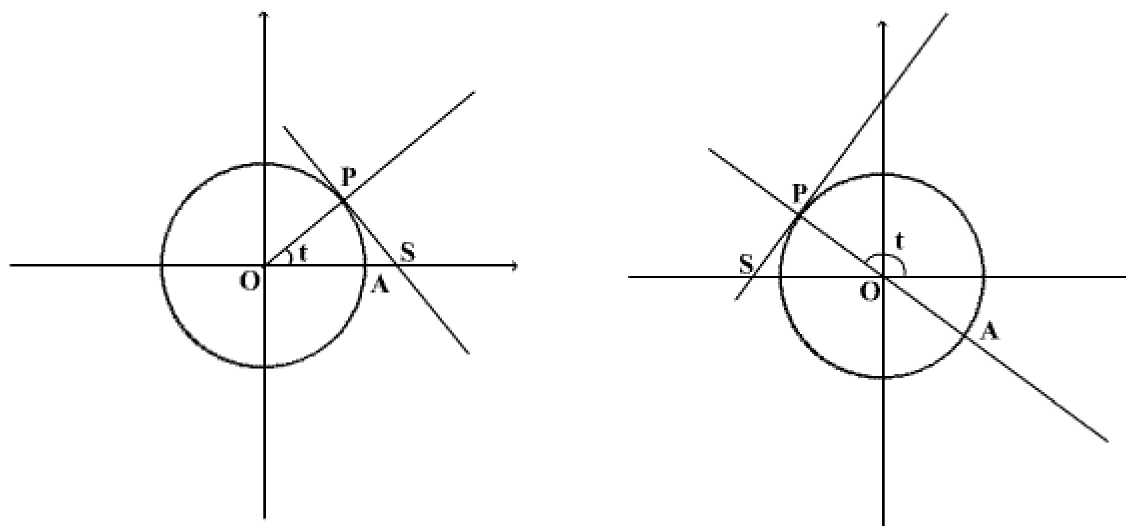


Figura 9

Definimos secante de t como sendo a medida algébrica do segmento OS, ou seja, a abscissa do ponto S no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, a reta tangente a S^1 em P é paralela à reta OA e, portanto, não existe interseção e a secante não está definida.

Função Secante

A função secante é a função f real de variável real, que associa a cada $t \in R$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, $k \in Z$, o número $f(t) = \sec t$:

$$f: \{ t \in R;\, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in Z \} \longrightarrow R$$

$$t \longmapsto f(t) = \sec t$$

Propriedades da função secante

1. Imagem

- A imagem da função secante é $\{ y \in R;\ y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1 \} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

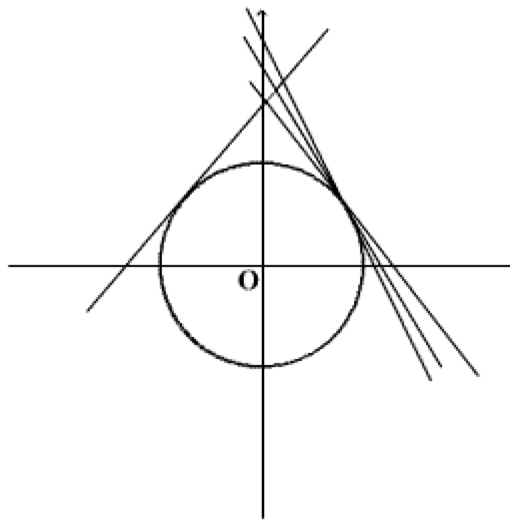


Figura 10

2. Sinal da função

- sec t > 0, se t pertence ao 1º ou 4º quadrantes.
- sec t < 0, se t pertence ao 2º e 3º quadrantes.

3. Crescimento e decrescimento

- A função secante é crescente em todos os intervalos dos tipos $[\ 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ou $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\ ]$, $k \in Z$.

- A função secante é decrescente em todos os intervalos dos tipos $[\ \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ )$ ou $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\ ]$, $k \in Z$.

4. Paridade

- A função secante é par: sec (-t) = sec t.

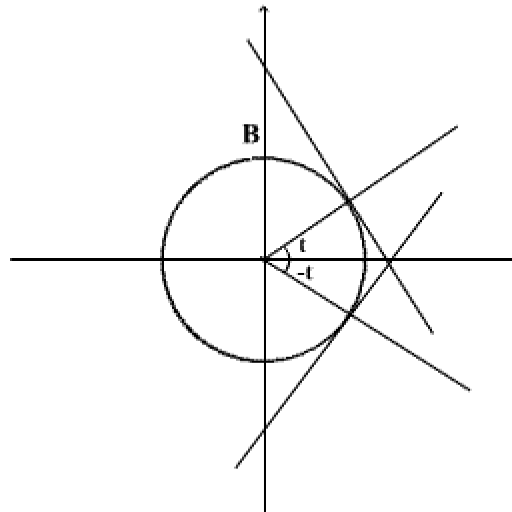


Figura 11

5. Periodicidade

- A função secante é periódica de período 2π: $\sec(t+2\pi) = \sec t$.

Gráfico:

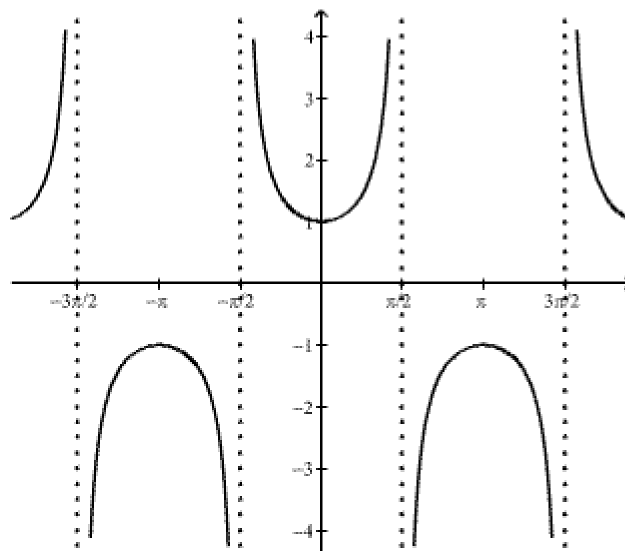


Figura 12

As retas $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$, são as assíntotas verticais do gráfico da função secante.

Considerando a definição dada para secante de t, podemos mostrar que $\sec t = \frac{1}{\cos t}$, para $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = k\pi$, $k \in Z$, temos $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$. Logo, $\sec t = 1 = \frac{1}{\cos t}$ ou $\sec t = -1 = \frac{1}{\cos t}$. Se $t \neq k\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, então $P = E(t)$ é diferente de A, B, A' e B' e, portanto, temos os triângulos retângulos semelhantes OPS e OPP_1 (Figuras 13).

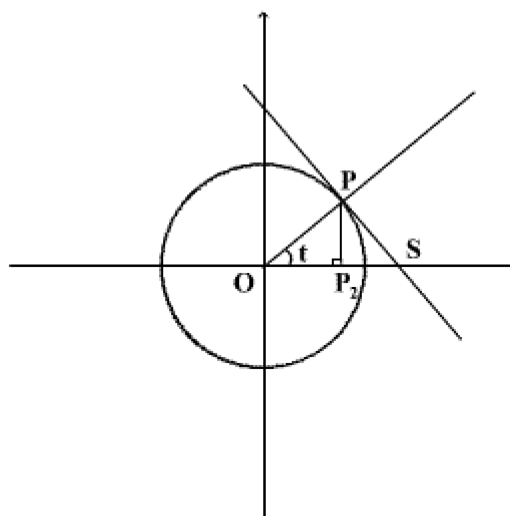


Figura 13

Daí, $\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|}$, ou seja, $\frac{|\sec\ t|}{1} = \frac{1}{|\cos t|}$.

Analisando os sinais de sec t e de cos t, nos quatro quadrantes, concluímos que

$\sec t = \frac{1}{\cos\ t}$, para $t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

COSSECANTE

Dado $t \in R$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$, seja $P = E(t)$. Consideremos a reta tangente a S^1 no ponto P e seja C a sua interseção com a reta OB.

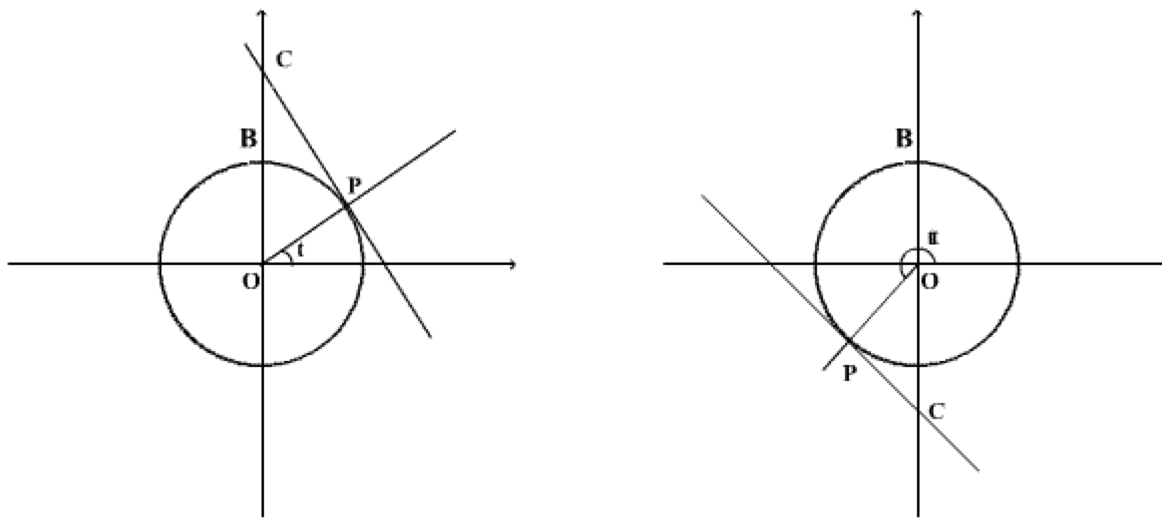


Figura 14

Definimos cossecante de t como sendo a medida algébrica do segmento OC, ou seja, a ordenada do ponto C no plano cartesiano.

Podemos observar que, para $t = k\pi$, $k \in Z$, $P = E(t) = E(0)$ ou $P = E(t) = E(\pi)$ e a reta tangente a S^1 em P é paralela à reta OB. Logo, não existe o ponto de interseção C e, portanto, a cossecante não está definida.

Considerando a definição dada para cossecante de t, podemos mostrar que $\text{cossec } t = \dfrac{1}{\text{sen } t}$, para $t \neq k\pi$, $k \in Z$. De fato, se $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, temos $P = E(t) = E(\dfrac{\pi}{2})$ ou $P = E(t) = E(\dfrac{3\pi}{2})$; logo $\text{cossec } t = 1 = \dfrac{1}{\text{sen } t}$ ou $\text{cossec } t = -1 = \dfrac{1}{\text{sen } t}$. Se $t \neq$

$k\frac{\pi}{2}$, então P é diferente de A, B, A' e B' e, portanto, temos os triângulos retângulos OCP e O P_2P (Figuras 15), que são semelhantes.

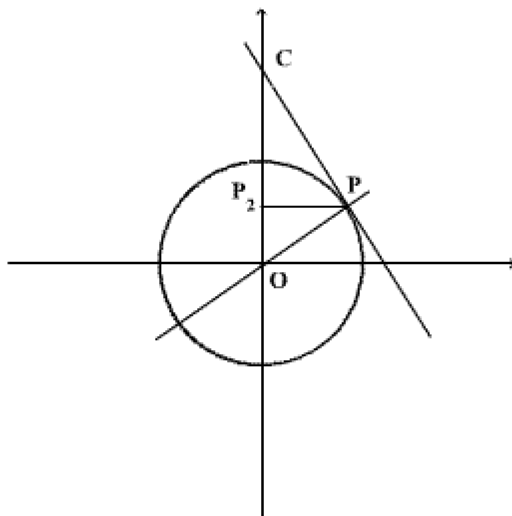


Figura 15

Usando a razão de semelhança, segue que $\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|PO|}{|OP_2|}$, ou seja, $\frac{|\cos\sec t|}{1} = \frac{1}{|\text{sen } t|}$.

Analisando os sinais de cossec t e de sen t nos quatro quadrantes, concluímos que

cossec t = $\frac{1}{\text{sen } t}$, $\forall\ t \neq k\pi, k \in Z$.

11. EXERCÍCIOS

1) Defina a função cossecante e faça um estudo geral incluindo a construção do seu gráfico.

2) Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(t) = \text{cotg}\ \dfrac{t}{4}$. b) $f(t) = \sec\left(t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

c) f(t) = cossec(2t)

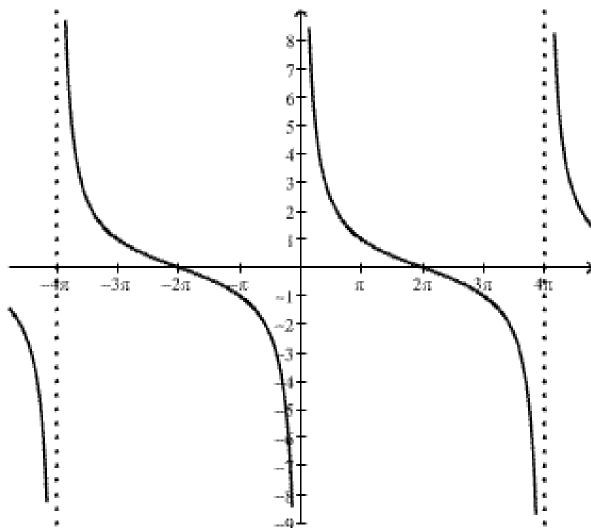
3) Verifique as identidades:

a) $\sec^2 t = 1 + \text{tg}^2\, t$. b) $\text{cotg}^2\, t = 1 + \text{cossec}^2\, t$.

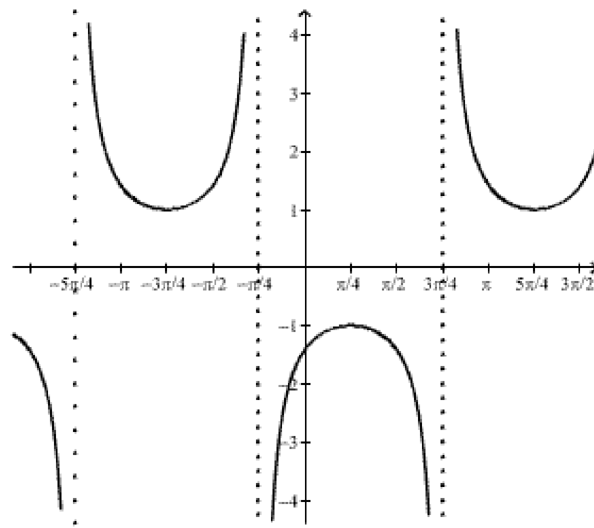
c) $(1 - \text{sen}^2 t).(1 + \text{tg}^2\, t) = 1$. d) $\text{cotg}^2\, t = \dfrac{\cos\sec^2 t}{1 + \text{tg}^2\, t}$.

RESPOSTAS

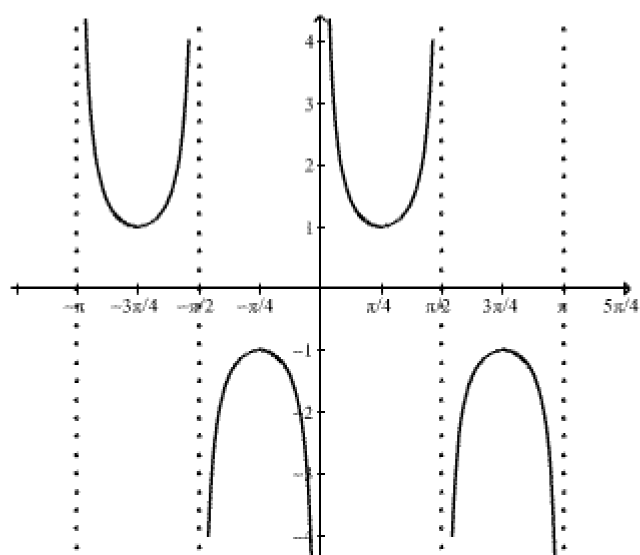
2a)



2b)



2c)



12. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Função arco-seno

A função seno, f: R→R, onde f(x) = sen x não é injetora (pois, $\pi \neq 0$ e $\text{sen}\pi \neq \text{sen}0$) e não é sobrejetora (pois, $\nexists\, x \in R; \text{sen } x = 3$). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$; g(x) = sen x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

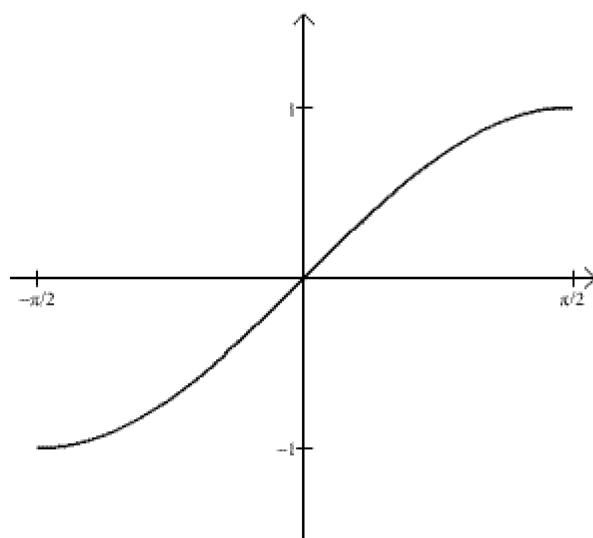


Figura 1

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-seno. Definida por:

$$g^{-1}:[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \text{arc sen } x$$

OBS: arc sen x significa "o arco cujo seno é x"
Logo,

$y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e $-1 \leq x \leq 1$

Conseqüência: arc sen (sen y) = y e sen (arc sen x) = x; y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $x \in [-1,1]$.

Exemplo:
Calcule arc sen (1/2).

R] arc sen (1/2) = y , y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\Leftrightarrow$ sen y = $\frac{1}{2}$, y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\Leftrightarrow$ y = $\frac{\pi}{6}$

Gráfico

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta y = x. Então, a partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

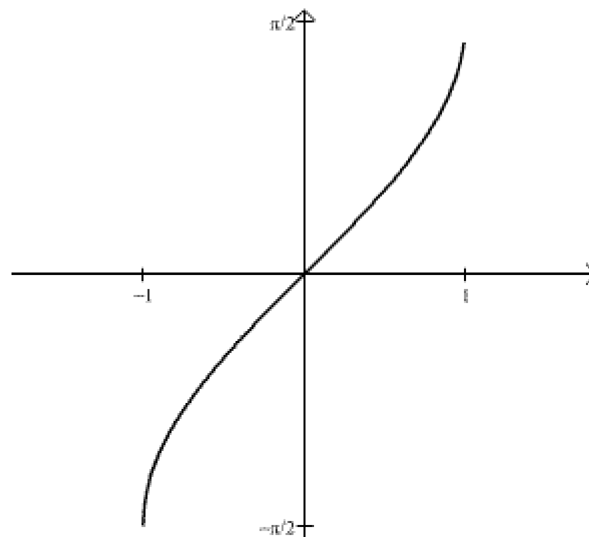


Figura 2

Função arco-cosseno

A função cosseno, f: R→R, onde f(x) = cos x não é injetora (pois, $\pi/2 \neq 3\pi/2$ e $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2)$) e não é sobrejetora (pois, $\nexists x \in R; \cos x = 3$). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g:[0,\pi] \to [-1,1]$; g(x) = cos x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

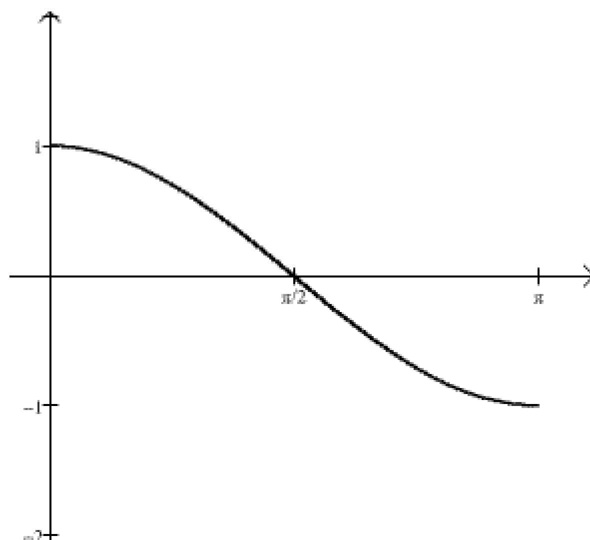


Figura 3

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-cosseno. Definida por:

$$g^{-1} : [-1,1] \rightarrow [0, \pi]$$
$$x \mapsto \text{arc} \cos x$$

OBS: arc cos x significa "o arco cujo cosseno é x"
Logo,

y = arc cos x $\Leftrightarrow$ cos y = x , 0 $0 \le y \le \pi$ e $-1 \le x \le 1$

Conseqüência: arc cos (cos y) = y e cos (arc cos x) = x, $y \in [0, \pi]$ e $-1 \le x \le 1$

Exemplo:
Calcule arc cos(-1/2).
R] arc cos (-1/2) = y , y $\in [0, \pi]$ $\Leftrightarrow$ cos y = $-\frac{1}{2}$, y $\in [0, \pi]$ $\Leftrightarrow$ y = $\frac{5\pi}{6}$

Gráfico
A partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

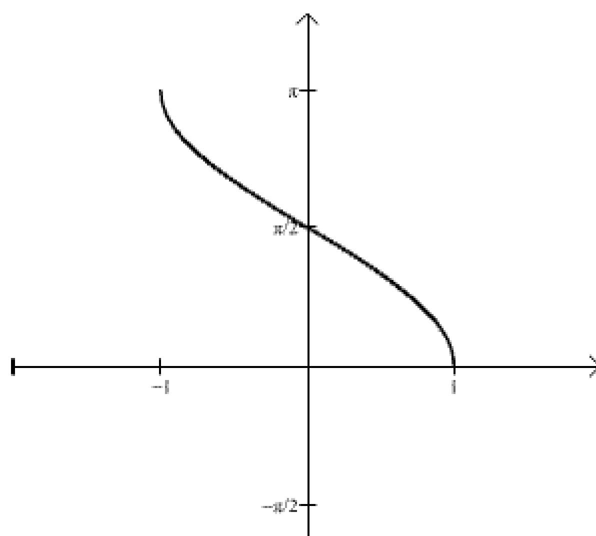


Figura 4

Função arco-tangente

A função tangente, f: $\left\{x \in R; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in Z\right\}$ $\rightarrow$R, onde f(x) = tg x é sobrejetora (como já tínhamos visto anteriormente) mas, não é injetora (pois, $0 \neq \pi$ e tg(0) ≠ tg(π). Portanto, não é bijetora e conseqüentemente não admite inversa.

Porém, a função g, restrição de f, definida por $g:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \rightarrow R$; g(x) = tg x é bijetora; como pode ser constatado através do seu gráfico a seguir.

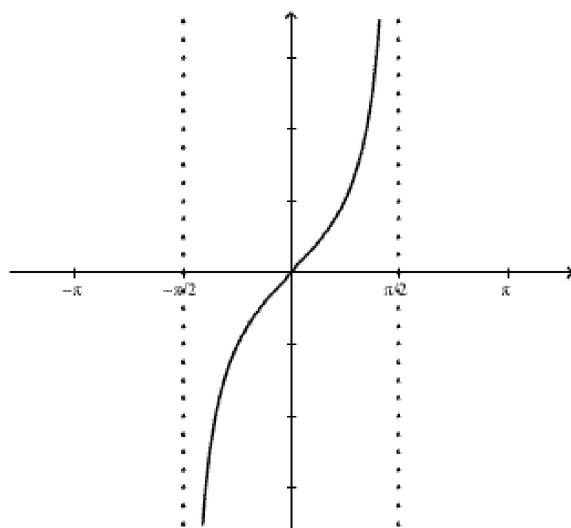


Figura 5

Assim sendo, a função g admite inversa g^{-1}, chamada de função arco-tangente. Definida por:

$$g^{-1} : R \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \text{arc tg } x$$

OBS: arc tg x significa “o arco cuja tangente é x”

Logo,

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow \text{tg } y = x\ ,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \in R}$$

Conseqüência: arc tg (tg y) = y e tg (arc tg x) = x, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e $x \in R$.

Exemplo:
Calcule arc tg(1).

R] arc tg (1) = y , y $\Leftrightarrow$ tg y = 1 , $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$

Gráfico

A partir do gráfico de g podemos obter o gráfico de g^{-1}.

13. EXERCÍCIOS

1) Determine:

a) arc sen 0 b) arc sen $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) arc sen $\left(-\frac{1}{2}\right)$ d) arc sen 1 e) arc sen (-1).

2) Calcule sen (2 arc sen (-3/5)).

3) Calcule:

a) arc cos 0, b) arc cos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) arc cos $\left(\frac{1}{2}\right)$ d) arc cos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e) arc cos (-1).

4) Sendo A um arco do 1^0 quadrante e arc sen x = A, determine arc cos x.

5) Calcule: sen $\left(\text{arc cos}(\frac{3}{5}) - \text{arc cos}(\frac{5}{13})\right)$.

6) Considere f(x) = cos(2arccosx).

a) Determine os valores de x tais que f(x) = 0

b) Faça um esboço do gráfico de f(x).

7) Prove a igualdade: arc tg (1/2) + arc tg (1/3) = $\frac{\pi}{4}$.

8) Resolva a equação: $\text{arctg}\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1-e^x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

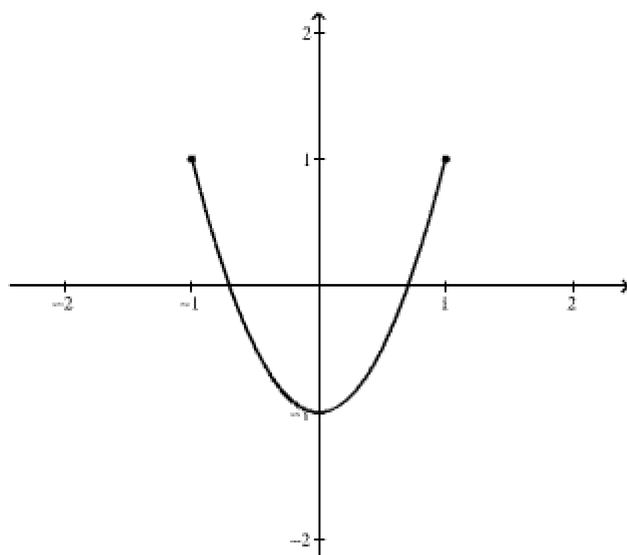
RESPOSTAS

1a) 0 b) π/3 c) -π/6 d) π/2 e) -π/2

2) –24/25 3a) π/2 b) π/4 c) 5π/6 d) π

4) π/2 – A 5) 6) a) $\pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

6b)



14. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A maioria das equações trigonométricas são ou reduzem-se a um dos três tipos a seguir:

1) sen x = sen a 2) cos x = cos a 3) tg x = tg β

Que são chamadas de equações fundamentais.

1⁰ Caso: sen x = sen a

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 1), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x = a + 2k\pi$, $k \in Z$.
- ou x e a têm imagens simétricas em relação ao eixo OY, isto é, $x = (\pi - a) + 2k\pi$, $k \in Z$.

Resumindo:

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad\qquad k \in Z \\ x = (\pi\text{-}a) + 2k\pi \end{cases}$$

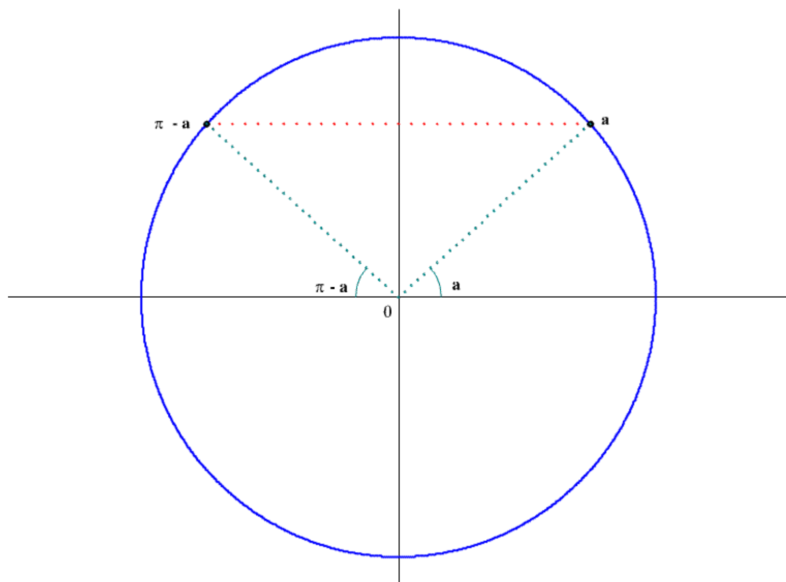


Figura 1

Exemplos:

1) sen x = $sen\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{8}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{8}+2k\pi$, $k \in Z$ $\Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{8}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{8}+2k\pi,\ k \in Z.$$

Logo, S = $\left\{x \in R; x=\frac{\pi}{8}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{8}+2k\pi,\ k \in Z\right\}$

2) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ sen x = $sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-(-\frac{\pi}{4})+2k\pi$,

$k \in Z$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k \in Z$.

Logo, S = $\left\{x \in R; x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k \in Z\right\}$.

3) $2sen^2x-3senx+1=0$

Fazendo sen x = t, obtemos

$$2t^2-3t+1=0 \Rightarrow t=1 \text{ ou } t=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = 1 \text{ ou sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

sen x = sen $\frac{\pi}{2}$ ou sen x = $sen\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $\left(x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in Z\right)$ ou

$\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k \in Z\right)$.

Logo, S = $\left\{x \in R; x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k \in Z\right\}$.

4) Resolva a equação anterior no intervalo $[0, 2\pi]$

Fazendo k = 0 na solução obtida no item anterior obtemos S = $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

2^0 Caso: cos x = cos a

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 2), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x=a+2k\pi$, $k \in Z$.

- ou x e a têm imagens simétricas em relação ao eixo OX, isto é, $x = -a + 2k\pi$, $k \in Z$.

Resumindo:

$$\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad\qquad k \in Z \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$$

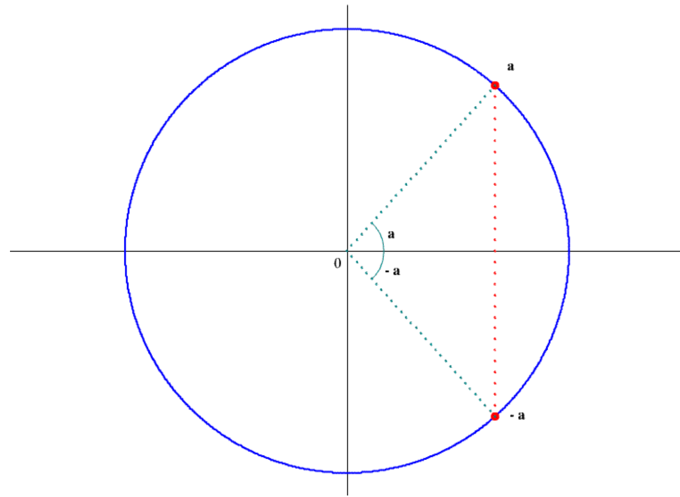


Figura 2

Exemplos:

1) cos x = -1 = cos π ⇒ $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = -\pi + 2k\pi$, $k \in Z$ ⇒ $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Logo, S = $\{x \in R; x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z\}$

2) cos x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇒ cos x = $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ⇒ x = $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

Logo, S = $\left\{x \in R; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

3) cos 3x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ cos x = $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ⇒ 3x = $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$ ⇒ x = $\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Logo, S = $\left\{x \in R; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$.

4) Resolva a equação anterior no intervalo [0, 2π].

Fazendo k variar no item anterior de maneira que as soluções pertençam ao intervalo [0, 2π],obtemos

S = $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right\}$.

3^0 Caso: tg x = tg a

Analisando o círculo trigonométrico (ver figura 3), temos que

- ou x e a têm a mesma imagem no círculo trigonométrico, isto é, $x = a + 2k\pi$, $k \in Z$.
- ou x e a têm imagens simétricas em relação a origem, isto é, $x = \pi + a + 2k\pi$, $k \in Z$, isto é, $x = a + (2k + 1)\pi$, $k \in Z$.

Resumindo: $x = a + k\pi$, $k \in Z$.

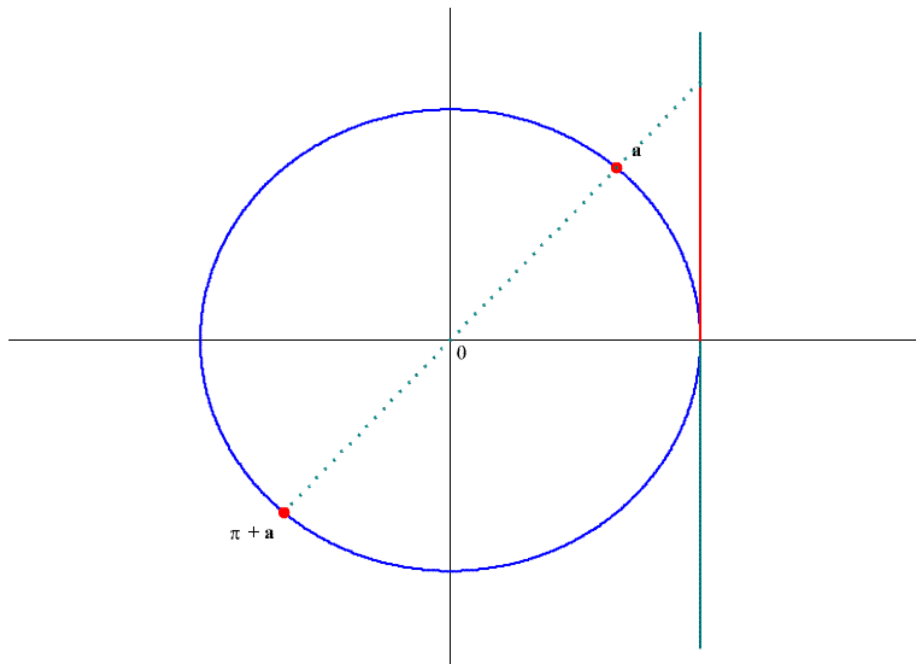


Figura 3

Exemplos:

1) tg x = $-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ tg x = tg $\frac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ x = $\frac{2\pi}{3}+k\pi$, k $\in$ Z.

Logo, S = $\left\{x\in R; x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z\right\}$.

2) tg 2x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ tg 2x = tg $\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ 2x = $\frac{\pi}{6}+k\pi$, k $\in$ Z $\Rightarrow$ x = $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, k $\in$ Z .

Logo, S = $\left\{x\in R; x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z\right\}$.

3) tg x = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ x = arctg$\left(\frac{1}{3}\right)$ + kπ, k $\in$ Z.

Logo, S = $\left\{x\in R; x=\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)+k\pi,\ k\in Z\right\}$.

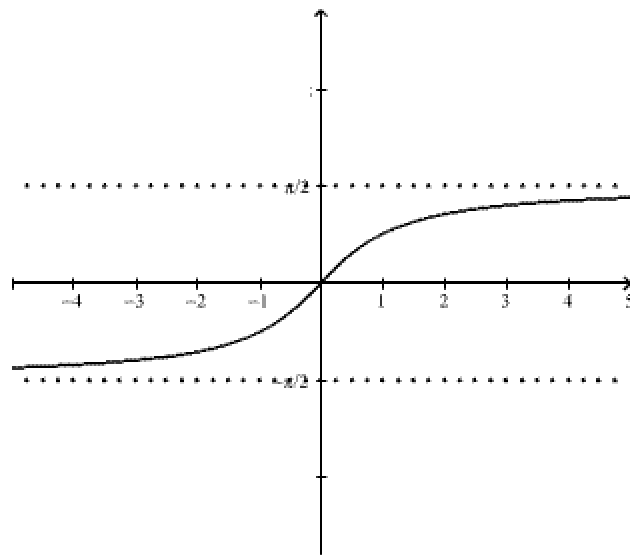


Figura 6

15. Exercícios

1) Resolva as equações:

a) sen x = sen($\frac{\pi}{18}$)

b) cos x = $\frac{1}{3}$

c) tg(3x) = tg(2x)

d) sen(3x) + sen x = 0

e) sen x + cos x = 0

f) sen(4x) = 1, para $0 \leq x \leq \pi$

g) cos(2x) = $\frac{1}{2}$, para $0 \leq x \leq 2\pi$

2) Se tg a = $\frac{1}{2}$ e a $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então determine cos a.

3) Determine o número de soluções da equação 2 $\cos^2(x)$ = 3 sen(x) que satisfazem a condição $0 \leq x \leq \pi$.

4) Determine o domínio da função f, definida por:

a) f(x) = $\sqrt{1-2\text{sen}(x)}$

b) g(x) = $\frac{1}{\sqrt{\text{tg}(x)}}$

RESPOSTAS

1) a) $\left\{x \in R; x = \frac{\pi}{18} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{18} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

b) $\left\{x \in R; x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

c) $\{x \in R; x = k\pi,\ k \in Z\}$

d) $\left\{x \in R; x = \frac{k\pi}{2},\ k \in Z\right\}$

e) $\left\{x \in R; x = \frac{7\pi}{4} + k\pi \ , k \in Z\right\}$ f) $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}$ g) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 3) 2

4) a) $\left\{x \in R; x = 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

b) $\left\{x \in R; x = k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z\right\}$



INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR I-A - MAT 198
SEM:2002.1 - Prof. Graça Luzia

ATIVIDADES DO WINPLOT(versão português)

I. DESCRIÇÃO DO SOFTWARE

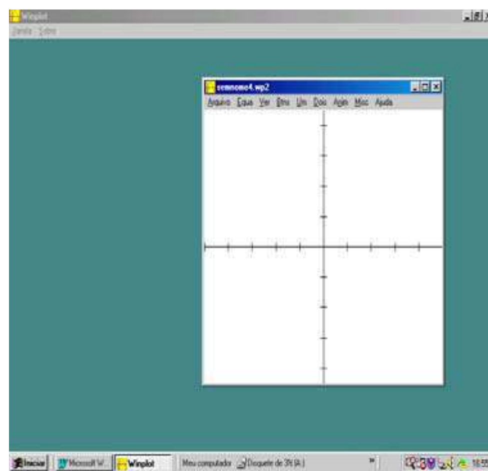
O **WINPLOT** é um programa da categoria dos "free softwares", elaborado por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy. Ele tem a vantagem de ser simples, utiliza pouca memória, mas por outro lado dispõe de vários recursos que o tornam atraente e útil para os diversos níveis de ensino-aprendizagem. Além destes fatos, foi recentemente lançada a sua versão para o Português, aumentando ainda mais a sua acessibilidade. É possível fazer o download do Winplot em http://math.exeter.edu/rparris .

De acordo com o seu nome, o **WIN...PLOT** é um programa para plotar gráficos de funções em Matemática, de uma ou duas variáveis, utilizando o Windows. Além disso, executa uma série de outros comandos.

1) Para abrir o programa, clique no seu ícone de atalho, previamente instalado.

Para visualizar um gráfico de função y=f(x), use a opção 2-dim do menu "Janela". Caso você queira uma função f(x,y), de duas variáveis, escolha a opção 3-dim.

A figura ao lado mostra o Winplot aberto com uma janela 2D e exibindo um sistema de eixos. É possível exibir as escalas nos eixos, (com ou sem decimais), as linhas de grade, entre outras opções. Para isso selecione as opções em "Ver → Grade"



Para fazer os exercícios, siga o seguinte roteiro:

Selecione:

1) Window
2) 2 - Dim
3) Equa → y = f(x) { digite a função } (clique "ok")

Como digitar algumas funções que utilizaremos:

Função	Como digitar	Observação
$y = \|x\|$	abs(x)	não esquecer o parêntesis
$y = x^2$	x^2	
$y = \sqrt{x}$	(x)^(1/2) ou sqr(x)	não esquecer o parêntesis
$y = \frac{1}{x}$	1/x	
$y = \frac{1}{x+1}$	**1/(x+1)**	**não esquecer o parêntesis**

- **Para encontrar como se digita outras funções use: equa → biblioteca.**
- **Antes de passar para um novo item, responda às questões formuladas.**
- **Antes de iniciar um novo item, apague todas as funções digitadas no item anterior.**

1. Trace os gráficos das seguintes funções:
   a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = |x + 1|$.
   [i) Digite primeiro: x +1 (clique "ok") e ii) digite abs(x+1) (clique "ok")]
   b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$
   c) $f(x) = x^3$ e $g(x) = |x^3|$
   d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

Como podemos obter o gráfico de g a partir do gráfico de f nos exemplos acima?

2. Trace os gráficos das seguintes funções:
   a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = |x| + 1$.
   b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = |x^2| - 4|x| + 3$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{|x|}$
   d) $f(x) = x^3$ e $g(x) = |x|^3$
   e) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{|x|}$

Como podemos obter o gráfico de g a partir do gráfico de f nos exemplos acima?

3. Trace os gráficos das seguintes funções:
   a) $f(x) = x$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = x + 1$
   b) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 2$; $h(x) = x^2 + 1$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{x} - 2$; $h(x) = \sqrt{x} + 1$
   d) $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x} - 2$; $h(x) = \frac{1}{x} + 1$

Como podemos obter os gráficos de g e h a partir do gráfico de f nos exemplos acima?

4. Trace os gráficos das seguintes funções

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x-2)^2$; $h(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{x-2}$; $h(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Como podemos obter os gráficos de g e h a partir do gráfico de f nos exemplos acima?

5. Trace o gráfico de $y = -1 + \sqrt{x-1}$.

Observe que fazendo y + 1 = y′ e x − 1 = x′, obtemos $y' = \sqrt{x'}$. Neste caso o gráfico $y = \sqrt{x}$ foi transladado para um novo sistema de eixos X′OY′ com origem no ponto (−1, 1)

6. Trace os gráficos das seguintes funções, indicando em cada caso uma translação de eixos para uma nova origem

a) $f(x) = (x+1)^3 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - 1$

7. Trace os gráficos de $f(x) = |x-1| - |x-3|$ e de $g(x) = 4$. O que os gráficos indicam sobre a solução da equação modular $|x-1| - |x-3| = 4$? Altere o valor 4 para 3, 2, e 1 respectivamente. Quantas soluções aparecem nestes casos?

8. Trace os gráficos das funções $f(x) = |x| - |x-3|$ e $g(x) = 1$.

- Calcule as interseções usando o comando dois → interseções.
- Marque o ponto de interseção usando o comando equa → ponto

9. O Winplot permite traçar uma família a 1 parâmetro de curvas.

- Trace o gráfico da função $f(x) = ax^2$, a seguir use o comando Anim → A, e com o mouse faça **a** variar.
- Trace o gráfico da função $f(x) = x^2 + bx$, a seguir use o comando Anim → B, e com o mouse faça **b** variar.
- Trace o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + c$, a seguir use o comando Anim → C, e com o mouse faça **c** variar.
- Trace o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a seguir use o comando Anim e faça as constantes variarem.

10. Trace o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = (x+1)^3 - 1$ b) $f(x) = |(x+1)^3 - 1|$ c) $f(x) = x + x\sqrt{(x-1)^2}$

d) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x \le 0\\ \dfrac{1}{x-1}, 0 < x < 2\\ x-1, x \ge 2\end{cases}$

OBS: Para obter o gráfico desta função você deve proceder da seguinte forma.

- Equa → y = f(x) (digite (x+1)^2, escolha x_{min} = -5, x_{max} = 0, marque travar intervalo, clique ok)
- Equa → y = f(x) (digite 1/(x-1), escolha x_{min} = 0, x_{max} = 2, marque travar intervalo e clique ok)
- Equa → y = f(x) (digite x-1, escolha x_{min} = 2, x_{max} = 5, marque travar intervalo e clique ok)

11. Considere a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|-|x-1|}{x}, \text{se } x \ne 0\\ 2, \text{ se } x = 0\end{cases}$.

Construa o gráfico de:
a) f(x) b) -2f(x) c) -2 + f(x+1)

12. Construa (em cores diferentes) os gráficos das funções $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ e h(x) = x. O que você observou? O que podemos dizer a respeito de f e g?